Уравнения математической физики
Уравнение переноса

Скалько Юрий Иванович
Цыбулин Иван

Уравнения математической физики

Основное отличие УМФ от обыкновенных дифференциальных уравнений — зависимость неизвестной функции от многих переменных. В результате, в уравнениях возникают *частные производные*.

Рассмотрим одномерные нестационарные уравнения гиперболического типа:

- Уравнение переноса
- Волновое уравнение
- Гиперболические системы уравнений

Гиперболические системы уравнений

- Гиперболические системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial x} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Для гиперболичности требуется, чтобы все собственные числа $\lambda(\mathbf{A})$ были действительными и существовал базис из собственных векторов.

Уравнение переноса и волновое уравнение

- Уравнение переноса
$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + c\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial x} = f$$
Уравнение описывает перенос некоторой величины (например, плотности $\rho(t,x)$) со скоростью c.
- Волновое уравнение
$$\frac{\partial^2 E(t,x)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 E(t,x)}{\partial x^2} = f$$
Уравнение описывает распространение линейных волн (например, электрического поля $E(t,x)$) по среде со скоростью c по всем направлениям.

Волновое уравнение

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E(t,x)}{\partial x^2} = f$$

можно привести к виду гиперболической системы в переменных $u = \frac{\partial E}{\partial x}, v = \frac{\partial E}{\partial t}$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = f$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

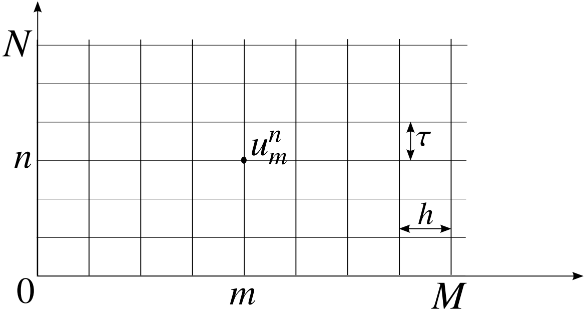
Или в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Легко убедиться, что $\lambda(\mathbf{A}) = \pm c$ и полная система векторов имеется.

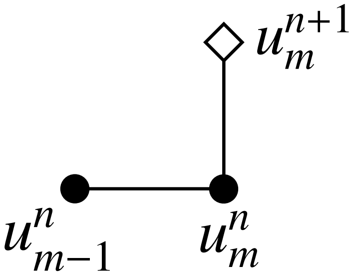
Сетка

Для представления численного решения так же, как и в случае ОДУ, необходима *сетка*. Отличие от ОДУ в том, что сетка уже не одномерная, а многомерная. Например, для уравнения в переменных (t, x) необходима двумерная сетка (по времени и пространству) Соответственно, сеточная функция будет иметь несколько индексов. Условимся u_m^n обозначать значение сеточной функции u на временном слое n в узле m:



Шаблон

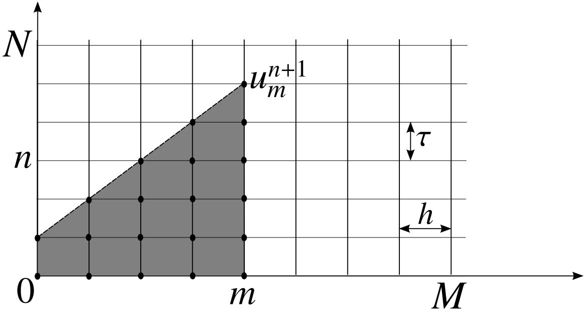
Пусть для вычисления u_m^{n+1} требуются значения функции u в нескольких сеточных узлах. Тогда эти узлы вместе с узлом $(n+1, m)$ образуют *шаблон разностной схемы*. Шаблон часто изображают графически, например для схемы «явный левый уголок» шаблон выглядит так:



Некоторые выводы о разностной схеме можно сделать изучив только ее шаблон.

Область зависимости решения разностной задачи

Выберем узел сетки $(n+1, m)$. Отметим все узлы сетки, которые нужны для вычисления u_m^{n+1}. Мы получим шаблон разностной схемы. К каждому новому узлу снова применим ту же процедуру. В результате получится некоторый конус — *область зависимости решения разностной задачи*



Все узлы, которые не попали в этот конус, не могут влиять на решение в узле $(n+1, m)$.

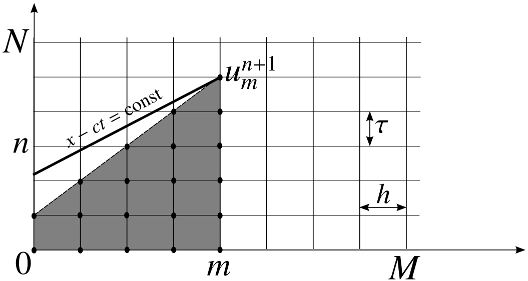
Область зависимости решения дифф. задачи

Все уравнения гиперболического типа имеют характеристики. Если из точки t_{n+1}, x_m выпустить все характеристики, то область от самой левой до самой правой характеристики будет *областью зависимости решения дифференциальной задачи*

Например, уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

имеет только одну характеристику $x - ct = \text{const}$.



Условие Куранта-Фридрихса-Леви

Если область зависимости решения дифференциальной задачи не содержится целиком в области зависимости решения разностной задачи, то решение разностной задачи не может сходиться к решению дифференциальной.
Действительно, изменим решение в той части области, которая лежит в области зависимости дифференциальной задачи, но которая не лежит в области зависимости разностной задачи. Решение разностной задачи при этом не изменится, а дифференциальной — изменится. Такое поведение не зависит от выбора мелкости сетки (при условии сохранения пропорций между τ и h), следовательно сходимость не возможна.

Аппроксимация

Изучение аппроксимации, как и для ОДУ, производится при помощи подстановки в разностную задачу проекции точного решения $y(t, x)$

$$u_m^n = [y]_m^n$$

При этом в разностном уравнении появится невязка δ_m^n. Невязка вычисляется путем подстановки вместо $[y]_{m'}^{n'}$ разложения в ряд Тейлора относительно некоторой точки (t_n, x_m).
Поскольку разложение в ряд Тейлора производится уже функции многих переменных, желательно выписывать разложение в ряд Тейлора относительно точки на пересечении линий шаблона, при этом из ряда Тейлора исчезают смешанные производные.

Некоторые схемы для уравнения переноса

- Явный левый уголок

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

- Явный правый уголок

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n$$

- Схема с центральной разностью

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

- Схема Лакса

$$\frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n\right)}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

Явный левый уголок

Подставим разложения

$$[y]_m^{n+1} = [y]_m^n + \tau [y_t]_m^n + \frac{\tau^2}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^3)$$

$$[y]_{m\pm1}^n = [y]_m^n \pm h[y_x]_m^n + \frac{h^2}{2}[y_{xx}]_m^n \pm \frac{h^3}{6}[y_{xxx}]_m^n + \frac{h^4}{24}[y_{xxxx}]_m^n + O(h^5)$$

в схему явный левый уголок

$$[y_t]_m^n + \frac{\tau}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^2) + c\left([y_x]_m^n - \frac{h}{2}[y_{xx}]_m^n + O(h^2)\right) = f_m^n + \delta$$

$$([y_t]_m^n + c[y_x]_m^n - f_m^n) + \frac{\tau}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^2) - c\left(\frac{h}{2}[y_{xx}]_m^n + O(h^2)\right) = \delta$$

$$\delta = \frac{\tau}{2}[y_{tt}]_m^n - \frac{ch}{2}[y_{xx}]_m^n + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau + h)$$

Схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству.

Схема с центральной разностью

Подставим разложения

$$[y]_m^{n+1} = [y]_m^n + \tau [y_t]_m^n + \frac{\tau^2}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^3)$$

$$[y]_{m\pm 1}^n = [y]_m^n \pm h[y_x]_m^n + \frac{h^2}{2}[y_{xx}]_m^n \pm \frac{h^3}{6}[y_{xxx}]_m^n + \frac{h^4}{24}[y_{xxxx}]_m^n + O(h^5)$$

В схему с центральной разностью

$$[y_t]_m^n + \frac{\tau}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^2) + c\left([y_x]_m^n + \frac{h^2}{6}[y_{xxx}]_m^n + O(h^4)\right) = f_m^n + \delta$$

$$([y_t]_m^n + c[y_x]_m^n - f_m^n) + \frac{\tau}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^2) + c\left(\frac{h^2}{6}[y_{xxx}]_m^n + O(h^4)\right) = \delta$$

$$\delta = \frac{\tau}{2}[y_{tt}]_m^n + \frac{ch^2}{6}[y_{xxx}]_m^n + O(\tau^2 + h^4) = O(\tau + h^2)$$

Схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространству.

Схема Лакса

Подставим разложения

$$[y]_m^{n+1} = [y]_m^n + \tau[y_t]_m^n + \frac{\tau^2}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^3)$$

$$[y]_m^n = [y]_m^n \pm h[y_x]_m^n + \frac{h^2}{2}[y_{xx}]_m^n \pm \frac{h^3}{6}[y_{xxx}]_m^n + \frac{h^4}{24}[y_{xxxx}]_m^n + O(h^5)$$

В схему Лакса

$$[y_t]_m^n + \frac{\tau}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^2) + \frac{h^2}{2\tau}[y_{xx}]_m^n + O\left(\frac{h^4}{\tau}\right) +$$

$$+ c\left([y_x]_m^n + \frac{h^2}{6}[y_{xxx}]_m^n + O(h^4)\right) = f_m^n + \delta$$

$$([y_t]_m^n + c[y_x]_m^n - f_m^n) + \frac{\tau}{2}[y_{tt}]_m^n + O(\tau^2) + \frac{h^2}{2\tau}[y_{xx}]_m^n + O\left(\frac{h^4}{\tau}\right) +$$

$$+ c\left(\frac{h^2}{6}[y_{xxx}]_m^n + O(h^4)\right) = \delta$$

Схема Лакса

Для схемы Лакса

$$\delta = \frac{\tau}{2}[y_{tt}]^n_m + \frac{h^2}{2\tau}[y_{xx}]^n_m + c\frac{h^2}{6}[y_{xxx}]^n_m + O\left(\tau^2 + \frac{h^4}{\tau} + h^4\right)$$

$$\delta = O\left(\tau + \frac{h^2}{\tau} + h^2\right) = O\left(\tau + \frac{h^2}{\tau}\right)$$

Аппроксимация схемы зависит от соотношения между τ и h. Например, если $\tau = O(h)$, то схема имеет первый порядок по пространству и времени, а если $\tau = O(h^2)$, то ошибка аппроксимации $O(1)$, то есть аппроксимации нет. Есть аппроксимация *другого* уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $\mu = \lim\limits_{\tau,h\to 0} \frac{h^2}{2\tau}$.

Устойчивость

Исследуем левый уголок на устойчивость. Из условия КФЛ можно сразу сказать, что при $\frac{c\tau}{h} > 1$ или $\frac{c\tau}{h} < 0$ устойчивости не будет, так как нет сходимости, а аппроксимация есть. (Иначе по теореме Рябенького аппроксимация + устойчивость = сходимость).

Чтобы производить расчеты по схеме «левый уголок» необходимы еще данные на левой границе и на начальном слое по времени

$$u_m^0 = \varphi_m$$
$$u_0^n = \psi^n$$

Устойчивость

Перепишем схему в виде

$$
\begin{aligned}
u_m^{n+1} &= u_m^n + \frac{c\tau}{h}\left(u_{m-1}^n - u_m^n\right) + \tau f_m^n, \quad m = \overline{1, M} \\
u_m^{n+1} &= \left[1 - \frac{c\tau}{h}\right] u_m^n + \frac{c\tau}{h} u_{m-1}^n + \tau f_m^n, \quad m = \overline{1, M} \\
|u_m^{n+1}| &\leqslant \left|1 - \frac{c\tau}{h}\right| |u_m^n| + \left|\frac{c\tau}{h}\right| |u_{m-1}^n| + \tau |f_m^n|, \quad m = \overline{1, M}
\end{aligned}
$$

Вводя нормы

$$
\|u^n\| = \max_{m=\overline{0,M}} |u_m^n|, \quad \|u\| = \max_{n=\overline{0,N}} \|u^n\|,
$$

можно записать

$$
\|u^{n+1}\| \leqslant \max\left\{|u_0^{n+1}|, \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) \max_{m>0} |u_m^n| + \frac{c\tau}{h} \max_{m>0} |u_{m-1}^n| + \tau \|f^n\|\right\}
$$

Устойчивость

$$\|u^{n+1}\| \leqslant \max\left\{|u_0^{n+1}|, \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right)\max_{m>0}|u_m^n| + \frac{c\tau}{h}\max_{m>0}|u_{m-1}^n| + \tau\|f^n\|\right\}$$

Оценив $\max\limits_{m>0}|u_{m-1}^n| \leqslant \|u^n\|, \max\limits_{m>0}|u_m^n| \leqslant \|u^n\|$

$$\|u^{n+1}\| \leqslant \max\{|\psi^{n+1}|, \|u^n\| + \tau\|f^n\|\} \leqslant \max\{|\psi^{n+1}|, \|u^n\|\} + \tau\|f\| \leqslant$$
$$\leqslant \max\{|\psi^{n+1}|, |\psi^n|, \|u^{n-1}\|\} + 2\tau\|f\| \leqslant \dots \leqslant \max\{\|\psi\|, \|\varphi\|\} + T\|f\|$$

Получаем

$$\|u\| \leqslant \|\psi\| + \|\varphi\| + T\|f\|$$

Это доказывает устойчивость задачи по правой части, начальным и граничным условиям.

Монотонные схемы

Оказывается, если схему можно представить в виде

$$u_m^{n+1} = \sum_\mu \alpha_\mu u_{m+\mu}^n + O(\tau),$$

причем все $\alpha_\mu \geqslant 0$, то доказательство устойчивости полностью аналогично доказательству устойчивости для явного левого уголка. Такие схемы называются монотонными. К сожалению, монотонных схем выше первого порядка аппроксимации не бывает. Запишем схему Лакса в такой форме

$$u_m^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{c\tau}{2h}\right) u_{m-1}^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{c\tau}{2h}\right) u_{m+1}^n + \tau f_m^n$$

Схема монотонна (а, значит, устойчива) при $\left|\frac{c\tau}{h}\right| \leqslant 1$, а при нарушении этого условия неустойчива по условию КФЛ.

Спектральный признак

Доказательство устойчивости по определению бывает довольно сложной задачей. В этой случае можно воспользоваться спектральным признаком устойчивости. Хотя он и не является строгим критерием, зачастую он дает правильный результат.
Спектральным признаком можно исследовать только *задачу Коши*, то есть задачу без граничных условий, только с начальными. Эта задача исследуется на устойчивость только по *начальным данным*, возмущение правой части всегда полагается равным 0. Из всех возможных возмущений начальных условий изучаются только возмущения вида $u_m^0 = e^{i\alpha m}$. Поскольку любую функцию можно представить в виде интеграла Фурье, такое сужение допустимо.

Спектральный признак для схемы $O(\tau + h^2)$

Рассмотрим задачу

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$
$$u_m^0 = e^{i\alpha m}$$

Найдем u_m^1

$$u_m^1 = u_m^0 + \frac{c\tau}{h}\frac{u_{m+1}^0 - u_{m-1}^0}{2} = u_m^0\left(1 + i\frac{c\tau}{h}\sin\alpha\right)$$

Аналогично,

$$u_m^n = \left(1 + i\frac{c\tau}{h}\sin\alpha\right)^n e^{i\alpha m}$$

Решение такой задачи с *постоянными* коэффициентами всегда можно искать в виде $u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$.

Спектральный признак для схемы $O(\tau + h^2)$

Найдем норму u_m^n

$$\|u\| = \max_m \max_{n=\overline{0,N}} |\lambda^n e^{i\alpha m}| = \max_{n=\overline{0,N}} |\lambda^n| = \max(1, |\lambda|^N)$$

- Если $|\lambda| \leqslant 1$, то решение ограничено константой $(C = 1)$, умноженной на возмущение начальных условий, то есть задача устойчива.
- Если $|\lambda| = 1 + D\tau$, то решение ограничено константой $(C = (1 + D\tau)^{T/\tau} \leqslant e^{DT})$, то есть задача тоже устойчива. Однако, чем больше константа D, тем сильнее зависимость возмущения решения от возмущения начальных условий, тем менее устойчива задача.
- Если $\frac{|\lambda|-1}{\tau} \to \infty$, то задача неустойчива.

Довольно часто задача полагается неустойчивой при $|\lambda| > 1$, хотя это не совсем строго.

Спектральный признак для схемы $O(\tau + h^2)$

Рассмотрим схему с

$$\lambda = 1 + i\frac{c\tau}{h}\sin\alpha$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \frac{c^2\tau^2}{h^2}\sin^2\alpha} > 1$$

При $\tau = O(h)$, $\quad \frac{|\lambda|-1}{\tau} = O\left(\frac{1}{\tau}\right) \to \infty$. Схема неустойчива.
При $\tau = \mu h^2 = O(h^2)$, $\quad |\lambda| = \sqrt{1 + c^2\mu\tau\sin^2\alpha} \approx 1 + \frac{c^2\mu\sin^2\alpha}{2}\tau \leqslant 1 + \frac{c^2\mu}{2}\tau$. Схема устойчива с константой $C = e^{\frac{c^2\mu T}{2}}$. Чем больше μ, тем больше константа устойчивости (тем хуже устойчивость).

Спасибо за внимание!

Цыбулин Иван
e-mail: tsybulin@crec.mipt.ru