

Уравнения параболического типа
Уравнение теплопроводности

Скалько Юрий Иванович
Цыбулин Иван

Одномерное уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности

Типичный представитель уравнений параболического типа — уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Будем также рассматривать случай $\kappa = \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Уравнение описывает распространение тепла, диффузию вещества, вязкие процессы и т.п.

Одномерное уравнение теплопроводности

Простейшая схема

Запишем простейшую явную схему для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{\kappa_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \kappa_{m-1/2} \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}}{h}$$

Похожая аппроксимация встречалась в задаче Штурма-Лиувилля (там она обеспечивала диагональное преобладание в системе уравнений).

В точке (t_n, x_m) правая часть аппроксимирована с порядком $O(h^2)$, а левая с порядком $O(\tau)$. Значит порядок аппроксимации схемы не хуже $O(\tau + h^2)$.

Одномерное уравнение теплопроводности

Простейшая схема. Аппроксимация

Запишем разложения точного решения и коэффициента теплопроводности в ряд Тейлора в окрестности (t_n, x_m)

$$[u]_m^{n+1} = [u]_m^n + \tau [u_t]_m^n + \frac{\tau^2}{2} [u_{tt}]_m^n + O(\tau^3)$$

$$[u]_{m\pm 1}^n = [u]_m^n \pm h [u_x]_m^n + \frac{h^2}{2} [u_{xx}]_m^n \pm \frac{h^3}{6} [u_{xxx}]_m^n + \frac{h^4}{24} [u_{xxxx}]_m^n + O(h^5)$$

$$[\varkappa]_{m\pm 1/2}^n = [\varkappa]_m^n \pm \frac{h}{2} [\varkappa_x]_m^n + \frac{h^2}{8} [\varkappa_{xx}]_m^n \pm \frac{h^3}{48} [\varkappa_{xxx}]_m^n + O(h^4)$$

Подставляя эти разложения в разностную схему и собирая слагаемые при одинаковых степенях h , получаем

$$\varkappa_{m+1/2} (u_{m+1}^n - u_m^n) - \varkappa_{m-1/2} (u_m^n - u_{m-1}^n) =$$

$$\left([\varkappa_x]_m^n [u_x]_m^n + [\varkappa]_m^n [u_{xx}]_m^n \right) h^2 + O(h^5) +$$

$$\left([\varkappa_{xxx}]_m^n [u_x]_m^n + 3[\varkappa_{xx}]_m^n [u_{xx}]_m^n + 4[\varkappa_x]_m^n [u_{xxx}]_m^n + 2[\varkappa]_m^n [u_{xxxx}]_m^n \right) h^4$$

Одномерное уравнение теплопроводности

Простейшая схема. Аппроксимация

Заметим, что $\kappa_x u_x + \kappa u_{xx} \equiv (\kappa u_x)_x$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\tau}{2} [u_{tt}]_m^n - \\ &\left([\kappa_{xxx}]_m^n [u_x]_m^n + 3[\kappa_{xx}]_m^n [u_{xx}]_m^n + 4[\kappa_x]_m^n [u_{xxx}]_m^n + 2[\kappa]_m^n [u_{xxxx}]_m^n \right) h^2 = \\ &= O(\tau + h^2) \end{aligned}$$

Устойчивость явной схемы

Если схема монотонна, то доказательство устойчивости проводится в полной аналогии с доказательством устойчивости монотонных схем для уравнения переноса. Найдем условие монотонности схемы, для этого перепишем ее в разрешенной форме

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\tau}{h} \left(\kappa_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \kappa_{m-1/2} \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} \right)$$

$$u_m^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau(\kappa_{m+1/2} + \kappa_{m-1/2})}{h^2} \right) u_m^n + \frac{\tau}{h^2} \kappa_{m-1/2} u_{m-1}^n + \frac{\tau}{h^2} \kappa_{m+1/2} u_{m+1}^n$$

Условие устойчивости

$$\frac{(\kappa_{m+1/2} + \kappa_{m-1/2}) \tau}{h^2} < 1$$

справедливо при

$$\frac{2\tau \max \kappa}{h^2} < 1$$

Одномерное уравнение теплопроводности

Устойчивость по спектральному признаку

Условие монотонности не всегда является необходимым, проверим достаточность по спектральному признаку. Для этого нужно избавиться от граничных условий, превратив начально-краевую задачу в задачу Коши, обнулить правую часть и рассмотреть возмущение специального вида $e^{i\alpha m}$. Необходимо также «заморозить» коэффициент \varkappa , то есть сделать его константой $\varkappa = \text{const}$.

Будем искать решение в виде $u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \varkappa \frac{e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}}{h^2} = -\frac{4\varkappa}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda = 1 - \frac{4\varkappa\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$|\lambda| < 1 \Rightarrow \frac{2\varkappa\tau}{h^2} < 1$$

Одномерное уравнение теплопроводности

Выводы для явной схемы

Итак, при исследовании как спектральным признаком, так и по определению получается условие устойчивости

$$\frac{\kappa \tau}{h^2} < \frac{1}{2}.$$

На практике, такое ограничение является довольно неприятным, и его стараются ослабить.

Одномерное уравнение теплопроводности

Неявная схема

Построим схему по аналогии с простейшей явной, только аппроксимируем производную по пространству на верхнем слое по времени.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{\varkappa_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} - \varkappa_{m-1/2} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h}}{h}$$

Аналогично явной схеме, ее порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$. Исследовать такую схему по определению на устойчивость уже практически невозможно. Заморозим коэффициент $\varkappa = \text{const}$ и применим спектральный признак

Одномерное уравнение теплопроводности

Спектральный признак. Неявная схема

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \lambda \kappa \frac{e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}}{h^2} = -\lambda \frac{4\kappa}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda = 1 - \lambda \frac{4\kappa\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\kappa\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Теперь λ меньше единицы по модулю всегда при любых соотношениях между τ и h , то есть схема безусловно устойчива.

Одномерное уравнение теплопроводности

Неявная схема

Но платой за безусловную устойчивость оказалась неявность схемы. Теперь на каждом шаге по времени необходимо решать систему уравнений для определения u^{n+1} .

$$\left(1 + \tau \frac{\kappa_{m+1/2} + \kappa_{m-1/2}}{h^2}\right) u_m^{n+1} - \frac{\tau \kappa_{m+1/2}}{h^2} u_{m+1}^{n+1} - \frac{\tau \kappa_{m-1/2}}{h^2} u_{m-1}^{n+1} = u_m^n$$

Вместе с граничными условиями

$$u_0^{n+1} = \alpha^{n+1}$$

$$u_M^{n+1} = \beta^{n+1}$$

мы получаем трехдиагональную систему. Более того, в этой системе имеется диагональное преобладание, значит алгоритм прогонки в этом случае гарантировано будет устойчив. Таким образом, решение по неявной схеме всего в несколько раз медленнее решения по явной схеме.

Многомерное уравнение теплопроводности

Двумерное уравнение теплопроводности

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом $\kappa = \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Многомерное уравнение теплопроводности

Простейшие аппроксимации

У сеточной функции теперь 3 индекса (m, n) — пространственные индексы по x и y , p — временной индекс. Условимся операторами $\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}$ обозначать разностные вторые производные, то есть

$$\Lambda_{xx} u_{n,m}^p = \frac{u_{m+1,n}^p - 2u_{m,n}^p + u_{m-1,n}^p}{h^2}$$

$$\Lambda_{yy} u_{n,m}^p = \frac{u_{m,n+1}^p - 2u_{m,n}^p + u_{m,n-1}^p}{h^2}$$

Простейшая явная схема записывается в этих обозначениях как

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^p}{\tau} = \varkappa (\Lambda_{xx} u_{m,n}^p + \Lambda_{yy} u_{m,n}^p)$$

$$u_{m,n}^0 = \varphi_{m,n}$$

$$u_{m,n}^p|_{\Gamma} = \psi_{m,n}^p|_{(x,y) \in \Gamma}$$

Многомерное уравнение теплопроводности

Свойства операторов вторых производных

Важной особенностью операторов Λ_{xx} и Λ_{yy} является то, что они, как и операторы $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ коммутируют

$$\Lambda_{xx}\Lambda_{yy}u_{m,n} = \Lambda_{yy}\Lambda_{xx}u_{m,n}$$

Также, для этих операторов известны собственные числа и собственные вектора

$$\Lambda_{xx}e^{i\alpha m} = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} e^{i\alpha m}$$

сравните с

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{\frac{i\alpha x}{h}} = -\frac{\alpha^2}{h^2} e^{\frac{i\alpha x}{h}}$$

Операторы Λ_{xx} , Λ_{yy} аппроксимируют вторые производные со вторым порядком

$$\Lambda_{xx}[u]_{m,n}^p = [u_{xx}]_{m,n}^p + \frac{h^2}{12}[u_{xxxx}]_{m,n}^p + O(h^4),$$

воспользуемся этим для нахождения ошибки аппроксимации

$$\frac{[u]_{m,n}^{p+1} - [u]_{m,n}^p}{\tau} = \varkappa (\Lambda_{xx}[u]_{m,n}^p + \Lambda_{yy}[u]_{m,n}^p) + \delta$$

$$\delta = \frac{\tau}{2}[u_{tt}] + O(\tau^2) + \varkappa \frac{h^2}{12} ([u_{xxxx}]_{m,n}^p + [u_{yyyy}]_{m,n}^p) + O(h^4) = O(\tau + h^2)$$

Проверим устойчивость по спектральному признаку. Ищем решение в виде $u_{m,n}^p = \lambda^p e^{i\alpha m} e^{i\beta n}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \kappa \left(-\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\lambda = 1 - \frac{4\kappa\tau}{h^2} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

$$|\lambda| < 1 \Rightarrow \frac{\kappa\tau}{h^2} < \frac{1}{4}$$

Схема является условно устойчивой с вдвое более жестким условием, чем для одномерной схемы

Многомерное уравнение теплопроводности

Неявная схема

Изучим устойчивость неявной схемы

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^p}{\tau} = \varkappa (\Lambda_{xx} u_{m,n}^{p+1} + \Lambda_{yy} u_{m,n}^{p+1})$$

Также ищем решение в виде $u_{m,n}^p = \lambda^p e^{i\alpha m} e^{i\beta n}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \varkappa \lambda \left(-\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\varkappa\tau}{h^2} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)}$$

$$|\lambda| < 1$$

Схема безусловно устойчива, как и в одномерном случае.

Многомерное уравнение теплопроводности

Схемы расщепления

В двумерном случае матрица системы уже не трехдиагональная. Аналогичных быстрых методов для такой системы не существует. Выходом из положения являются различные методы расщепления. Рассмотрим на примере следующей схемы

$$\frac{w_{m,n}^{p+1/2} - u_{m,n}^p}{\tau/2} = \varkappa \left(\Lambda_{xx} w_{m,n}^{p+1/2} + \Lambda_{yy} u_{m,n}^p \right)$$
$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - w_{m,n}^{p+1/2}}{\tau/2} = \varkappa \left(\Lambda_{xx} w_{m,n}^{p+1/2} + \Lambda_{yy} u_{m,n}^{p+1} \right)$$

Шаг по времени разбивается на два полушага. На первом полушаге аппроксимация производной по x неявная, по y явная, на следующем полушаге — наоборот.

Многомерное уравнение теплопроводности

Исключение промежуточного слоя

Запишем схему в операторном виде

$$w^{p+1/2} - u^p = \frac{\kappa T}{2} \left(\Lambda_{xx} w^{p+1/2} + \Lambda_{yy} u^p \right)$$

$$u^{p+1} - w^{p+1/2} = \frac{\kappa T}{2} \left(\Lambda_{xx} w^{p+1/2} + \Lambda_{yy} u^{p+1} \right)$$

$$\left(E - \frac{\kappa T}{2} \Lambda_{xx} \right) w^{p+1/2} = \left(E + \frac{\kappa T}{2} \Lambda_{yy} \right) u^p$$

$$\left(E - \frac{\kappa T}{2} \Lambda_{yy} \right) u^{p+1} = \left(E + \frac{\kappa T}{2} \Lambda_{xx} \right) w^{p+1/2}$$

Чтобы найти $w^{p+1/2}$ достаточно сделать прогонку по координате x , затем прогонку по координате y , чтобы найти u^{p+1} . Исключим $w^{p+1/2}$

$$u^{p+1} = \left(E - \frac{\kappa T}{2} \Lambda_{yy} \right)^{-1} \left(E + \frac{\kappa T}{2} \Lambda_{xx} \right) \left(E - \frac{\kappa T}{2} \Lambda_{xx} \right)^{-1} \left(E + \frac{\kappa T}{2} \Lambda_{yy} \right) u^p$$

Многомерное уравнение теплопроводности

Аппроксимация схемы расщепления

$$u^{p+1} = \left(E - \frac{\kappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)^{-1} \left(E + \frac{\kappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right) \left(E - \frac{\kappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)^{-1} \left(E + \frac{\kappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right) u^p$$

Раскладываем операторы в ряд

$$\left(E - \frac{\kappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)^{-1} = E + \frac{\kappa\tau}{2}\Lambda_{xx} + \frac{\kappa^2\tau^2}{4}\Lambda_{xx}^2 + O(\tau^3)$$

и перемножая, получаем

$$u^{p+1} = \left(E + \kappa\tau(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}) + \frac{\kappa^2\tau^2}{2}(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})^2 + O(\tau^3)\right) u^p$$

$$\frac{u^{p+1} - u^p}{\tau} = (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}) u^p + \frac{\kappa^2\tau}{2}(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})^2 u^p + O(\tau^2)$$

Ошибка аппроксимации

$$\delta = \frac{\tau}{2}[u_{tt}]^p - \frac{\kappa^2\tau}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u^p + O(\tau^2 + h^2)$$

Ошибка аппроксимации

$$\delta = \frac{\tau}{2}[u_{tt}]^p - \frac{\kappa^2 \tau}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u^p + O(\tau^2 + h^2)$$

На первый взгляд ошибка аппроксимации $O(\tau + h^2)$, но внимательно посмотрев, можно заметить, что на решении

$$u_{tt} = \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u$$

и первые два члена ошибки взаимно уничтожаются и ошибка аппроксимации равна

$$\delta = O(\tau^2 + h^2)$$

Многомерное уравнение теплопроводности

Устойчивость схемы расщепления

$$u^{p+1} = \left(E - \frac{\kappa\tau}{2} \Lambda_{yy}\right)^{-1} \left(E + \frac{\kappa\tau}{2} \Lambda_{xx}\right) \left(E - \frac{\kappa\tau}{2} \Lambda_{xx}\right)^{-1} \left(E + \frac{\kappa\tau}{2} \Lambda_{yy}\right) u^p$$

Воспользуемся спектральным признаком

$$u^p = \lambda^p e^{i\alpha m} e^{i\beta n}$$

Заметим, что u^p — собственная функция операторов Λ . Это позволяет заменить все операторы на собственные значения

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\kappa\tau}{2h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}} \left(1 - \frac{4\kappa\tau}{2h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{1 + \frac{4\kappa\tau}{2h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{4\kappa\tau}{2h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)$$

$$|\lambda| = \left| \frac{1 - \frac{4\kappa\tau}{2h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{4\kappa\tau}{2h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right| \left| \frac{1 - \frac{4\kappa\tau}{2h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{4\kappa\tau}{2h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}} \right| < 1$$

Данная схема также безусловно устойчива, имеет порядок $O(\tau^2 + h^2)$ и один шаг «стоит» две прогонки

Спасибо за внимание!

tsybulin@crec.mipt.ru