

# Интерполяция Сплайны

Скалько Юрий Иванович  
**Цыбулин Иван**

# Задача интерполяции

## Задача

Предположим, что некоторая функция  $f(x)$  известна в точках  $\{x_k\}_{k=1}^n: f(x_k) = f_k$ . Как определить ее значение в какой-нибудь другой точке  $x^* \neq x_k$ ?

# Задача интерполяции

## Задача

Предположим, что некоторая функция  $f(x)$  известна в точках  $\{x_k\}_{k=1}^n: f(x_k) = f_k$ . Как определить ее значение в какой-нибудь другой точке  $x^* \neq x_k$ ?

Конечно, без дополнительных условий данная задача некорректна. Функция может вести себя в промежутках между заданными точками произвольно. Но оказывается, что при определенных условиях, исходную функцию можно достаточно хорошо *приблизить* функцией из некоторого семейства так, чтобы она проходила через заданные точки  $(x_k, f_k)$ . Эта функция называется *интерполянт*

# Терминология

Понятия «узел», «сетка», «шаг сетки» встречаются в вычислительной математике очень часто.

- В отношении задачи интерполяции, *узлами* называются точки  $x_k$ , то есть точки, в которых заданы значения функции.
- *Сеткой* называется совокупность всех узлов. *Шагом сетки* называется расстояние между соседними узлами.
- Шаг может быть постоянным (равномерная сетка) или переменным (неравномерная сетка).

## Виды интерполяции

В зависимости от вида семейства функций интерполяция бывает

- алгебраической — интерполянт является многочленом от  $x$

## Виды интерполяции

В зависимости от вида семейства функций интерполяция бывает

- алгебраической — интерполянт является многочленом от  $x$
- тригонометрической — интерполянт является тригонометрическим многочленом

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots + a_m \cos \frac{2\pi m x}{L} + b_m \sin \frac{2\pi m x}{L}$$

# Виды интерполяции

В зависимости от вида семейства функций интерполяция бывает

- алгебраической — интерполянт является многочленом от  $x$
- тригонометрической — интерполянт является тригонометрическим многочленом

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots + a_m \cos \frac{2\pi m x}{L} + b_m \sin \frac{2\pi m x}{L}$$

- сплайновой — интерполянт является кусочно-многочленной функцией. На каждом отрезке  $[x_k, x_{k+1}]$  сплайн является многочленом, а в узлах ставятся дополнительные условия (непрерывность, гладкость и т.п.)

## Система уравнений для коэффициентов

Будем искать многочлен  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ , который удовлетворяет всем равенствам  $P(x_k) = f_k$ . Неизвестными здесь будут коэффициенты многочлена  $a_j$ .



## Система уравнений для коэффициентов

Будем искать многочлен  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ , который удовлетворяет всем равенствам  $P(x_k) = f_k$ . Неизвестными здесь будут коэффициенты многочлена  $a_j$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots = f_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots = f_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots = f_n \end{array} \right.$$

## Система уравнений для коэффициентов

Будем искать многочлен  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ , который удовлетворяет всем равенствам  $P(x_k) = f_k$ . Неизвестными здесь будут коэффициенты многочлена  $a_j$ .

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots = f_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots = f_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots = f_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

## Разрешимость системы

Задача алгебраической интерполяции, таким образом, свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

### Вопрос

Как называется эта матрица? Чему равен ее определитель?

## Разрешимость системы

Задача алгебраической интерполяции, таким образом, свелась к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

### Вопрос

Как называется эта матрица? Чему равен ее определитель? Эта матрица называется матрицей Вандермонда и ее определитель  $\det W = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \neq 0$  при  $x_i \neq x_j$

Получается, что задача алгебраической интерполяции всегда имеет решение, и при этом единственное — многочлен степени  $n - 1$ .

## Другие методы

Коэффициенты многочлена-интерполанта можно найти, решив СЛАУ. Однако, существуют более простые и надежные методы построения этого многочлена, а именно

- Интерполяционный многочлен в форме Ньютона
- Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

## Другие методы

Коэффициенты многочлена-интерполянта можно найти, решив СЛАУ. Однако, существуют более простые и надежные методы построения этого многочлена, а именно

- Интерполяционный многочлен в форме Ньютона
- Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

### Замечание

Необходимо понимать, что интерполянт остается все тем же единственным многочленом степени  $n - 1$ , проходящим через все точки  $(x_k, f_k)$ . Отличие заключается лишь в способе его построения.

## Другие методы

Коэффициенты многочлена-интерполянта можно найти, решив СЛАУ. Однако, существуют более простые и надежные методы построения этого многочлена, а именно

- Интерполяционный многочлен в форме Ньютона
- Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

### Замечание

Необходимо понимать, что интерполянт остается все тем же единственным многочленом степени  $n - 1$ , проходящим через все точки  $(x_k, f_k)$ . Отличие заключается лишь в способе его построения.

Интерполяционный многочлен Ньютона проще строить на практике, но интерполяционный многочлен Лагранжа оказывается весьма удобным для теоретического изучения свойств интерполянтов.

# Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Построение интерполянта в форме Ньютона происходит путем последовательного добавления точек и соответствующего «подправления» интерполянта.



# Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Построение интерполянта в форме Ньютона происходит путем последовательного добавления точек и соответствующего «подправления» интерполянта.

- 1 Изначально есть только одно значение  $f(x_1) = f_1$  и интерполянт просто равен константе  $P(x) = f_1$ .

# Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Построение интерполянта в форме Ньютона происходит путем последовательного добавления точек и соответствующего «подправления» интерполянта.

- 1 Изначально есть только одно значение  $f(x_1) = f_1$  и интерполянт просто равен константе  $P(x) = f_1$ .
- 2 Предположим, что интерполянт для первых  $k$  точек уже построен. Добавляем точку  $(x_{k+1}, f_{k+1})$ . Чтобы не нарушить интерполяционное свойство, к интерполянту нужно добавить функцию, которая в точках  $x_1 \div x_k$  обращается в ноль.
- 3 Общий вид этой функции  $A(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$ . Значение  $A$  определяется из требования  $P(x_{k+1}) = f_{k+1}$

## Пример интерполянта в форме Ньютона

Построим интерполянт по следующим данным

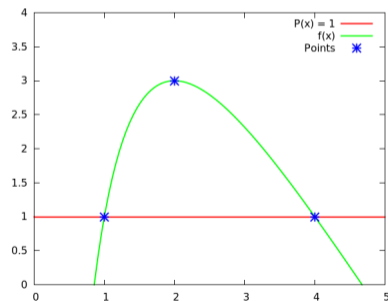
$x_k$	1	2	4
$f_k$	1	3	1

# Пример интерполянта в форме Ньютона

Построим интерполянт по следующим данным

$x_k$	1	2	4
$f_k$	1	3	1

- Полагаем  $P(x) = 1$ .



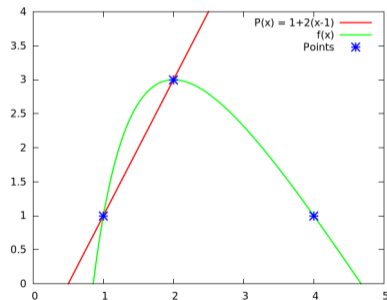
# Пример интерполянта в форме Ньютона

Построим интерполянт по следующим данным

$x_k$	1	2	4
$f_k$	1	3	1

- Полагаем  $P(x) = 1$ .
- Добавляем линейную функцию к  $P$ :

$$P = 1 + A(x - 1)$$



# Пример интерполянта в форме Ньютона

Построим интерполянт по следующим данным

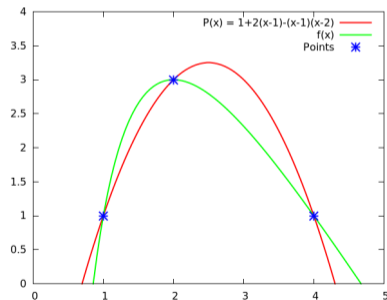
$x_k$	1	2	4
$f_k$	1	3	1

- Полагаем  $P(x) = 1$ .
- Добавляем линейную функцию к  $P$ :

$$P = 1 + A(x - 1)$$

- Добавляем квадратичную функцию к  $P$ :

$$P = 1 + 2(x - 1) + B(x - 1)(x - 2)$$



## Разделенные разности

Ньютон нашел выражения для неизвестных коэффициентов  $A$  в форме, удобной для практических вычислений. Для этого вводится понятие *разделенной разности*.

Разделенная разность  $k$ -го порядка обозначается как  $f(\underbrace{x_p, x_q, \dots, x_s}_{k+1 \text{ аргумент}})$ . Разделенные

разности нулевого порядка совпадают со значениями самой функции в этой точке

$$f(x_k) = f_k$$

Остальные разности определяются рекуррентно:

$$f(x_p, x_q, \dots, x_r, x_s) = \frac{f(x_q, \dots, x_r, x_s) - f(x_p, x_q, \dots, x_r)}{x_s - x_p}$$

В этих обозначениях,

$$P(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + f(x_1, x_2, x_3)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

## Пример вычисления разделенных разностей

Вычисление разделенных разностей удобно проводить в виде таблицы:



## Пример вычисления разделенных разностей

Вычисление разделенных разностей удобно проводить в виде таблицы:

$x_k$	1	2	4
$f(x_k)$	1	3	1
$f(x_k, x_{k+1})$			
$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$			

$$f(x_p, x_q, \dots, x_r, x_s) = \frac{f(x_q, \dots, x_r, x_s) - f(x_p, x_q, \dots, x_r)}{x_s - x_p}$$

## Пример вычисления разделенных разностей

Вычисление разделенных разностей удобно проводить в виде таблицы:

$x_k$	1	2	4
$f(x_k)$	1	3	1
$f(x_k, x_{k+1})$		2	
$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$			

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

## Пример вычисления разделенных разностей

Вычисление разделенных разностей удобно проводить в виде таблицы:

$x_k$	1	2	4
$f(x_k)$	1	3	1
$f(x_k, x_{k+1})$		2	-1
$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$			

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

## Пример вычисления разделенных разностей

Вычисление разделенных разностей удобно проводить в виде таблицы:

$x_k$	1	2	4
$f(x_k)$	1	3	1
$f(x_k, x_{k+1})$		2	-1
$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$		-1	

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$$

## Пример вычисления разделенных разностей

Вычисление разделенных разностей удобно проводить в виде таблицы:

$x_k$	1	2	4
$f(x_k)$	1	3	1
$f(x_k, x_{k+1})$		2	-1
$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$		-1	

$$P(x) = 1 + 2(x - x_1) - 1(x - x_1)(x - x_2)$$

# Базисные интерполяционные полиномы

Задача о базисном интерполяционном многочлене

Необходимо построить многочлен, который во всех точках  $x_k$ , кроме точки  $x_j$  обращался в 0, а в точке  $x_j$  был равен 1

$$l_j(x_k) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$$

## Базисные интерполяционные полиномы

### Задача о базисном интерполяционном многочлене

Необходимо построить многочлен, который во всех точках  $x_k$ , кроме точки  $x_j$  обращался в 0, а в точке  $x_j$  был равен 1

$$l_j(x_k) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$$

Поскольку степень этого многочлена  $n - 1$ , а  $x_k, k \neq j$  — его корни, то сам многочлен можно записать в форме

$$l_j(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)$$

## Базисные интерполяционные полиномы

### Задача о базисном интерполяционном многочлене

Необходимо построить многочлен, который во всех точках  $x_k$ , кроме точки  $x_j$  обращался в 0, а в точке  $x_j$  был равен 1

$$\ell_j(x_k) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$$

Поскольку степень этого многочлена  $n - 1$ , а  $x_k, k \neq j$  — его корни, то сам многочлен можно записать в форме

$$\ell_j(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)$$

Пользуясь условием  $\ell_j(x_j) = 1$

$$\ell_j(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$



## Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Используя базисные интерполяционные многочлены Лагранжа легко написать явное выражение для интерполянта в форме Лагранжа

$$P(x) = \sum_{j=1}^n \ell_j(x) f_j$$

## Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Используя базисные интерполяционные многочлены Лагранжа легко написать явное выражение для интерполянта в форме Лагранжа

$$P(x) = \sum_{j=1}^n \ell_j(x) f_j$$

Действительно,

$$P(x_k) = \sum_{j=1}^n \ell_j(x_k) f_j = \ell_k(x_k) f_k = f_k$$

## Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Используя базисные интерполяционные многочлены Лагранжа легко написать явное выражение для интерполянта в форме Лагранжа

$$P(x) = \sum_{j=1}^n \ell_j(x) f_j$$

Действительно,

$$P(x_k) = \sum_{j=1}^n \ell_j(x_k) f_j = \ell_k(x_k) f_k = f_k$$

Заметим, что базисные интерполяционные многочлены  $\ell_j(x)$  зависят только от *сетки*, а не от значений функции в узлах. Если приходится решать несколько задач интерполяции на одной и той же сетке, то форма Лагранжа может оказаться удобнее.

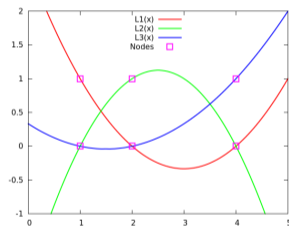
# Пример вычисления базисных многочленов

$x_k$	1	2	4
$f_k$	1	3	1

$$l_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x-2)(x-4)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{1}{2}(x-1)(4-x)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$



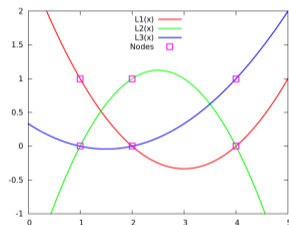
# Пример вычисления базисных многочленов

$x_k$	1	2	4
$f_k$	1	3	1

$$l_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x-2)(x-4)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{1}{2}(x-1)(4-x)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$



## Вопрос

Чему равна сумма  $l_1(x) + l_2(x) + l_3(x)$  ?

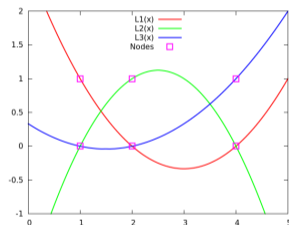
# Пример вычисления базисных многочленов

$x_k$	1	2	4
$f_k$	1	3	1

$$l_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x-2)(x-4)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{1}{2}(x-1)(4-x)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$



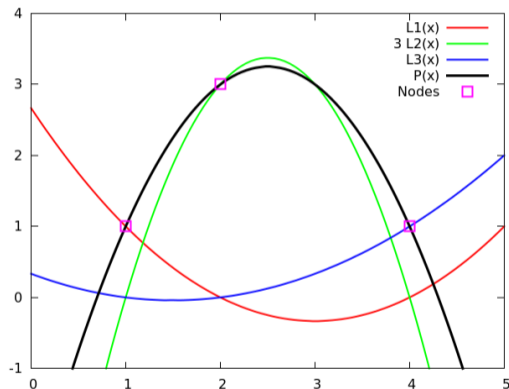
## Вопрос

Чему равна сумма  $l_1(x) + l_2(x) + l_3(x)$  ?

$$l_1(x) + l_2(x) + l_3(x) \equiv 1.$$

Подсказка: рассмотреть  $f(x) \equiv 1$  и ее интерполянт  $P(x)$

## Пример интерполяционного многочлена



$$P(x) = \frac{1}{3}(x-2)(x-4) + 3\frac{1}{2}(x-1)(4-x) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

## Погрешность алгебраической интерполяции

Логичный вопрос — насколько восстановленная по значениям функция (интерполянт) близка к исходной? Она в точности с ней совпадает в точках  $x_k$ , но что можно сказать про различия в промежутках?



## Погрешность алгебраической интерполяции

Логичный вопрос — насколько восстановленная по значениям функция (интерполянт) близка к исходной? Она в точности с ней совпадает в точках  $x_k$ , но что можно сказать про различия в промежутках?

### Теорема

Ошибка алгебраической интерполяции допускает оценку

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} |\omega(x)| \leq \frac{M_n}{n!} |\omega(x)|, \quad x, \xi, x_k \in [a, b],$$

где  $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

## Погрешность алгебраической интерполяции

Логичный вопрос — насколько восстановленная по значениям функция (интерполянт) близка к исходной? Она в точности с ней совпадает в точках  $x_k$ , но что можно сказать про различия в промежутках?

### Теорема

Ошибка алгебраической интерполяции допускает оценку

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} |\omega(x)| \leq \frac{M_n}{n!} |\omega(x)|, \quad x, \xi, x_k \in [a, b],$$

где  $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

Часть ошибки  $\frac{M_n}{n!}$  зависит только от вида функции, а вторая  $\omega(x)$  — только от расположения узлов интерполяции.

## Ошибка интерполяции на равномерной сетке

Рассмотри равномерную сетку  $x_k = a + \frac{k-1}{n-1}(b-a)$  Оценим максимальное значение функции  $|\omega(x)|$  на ней.

$$\max_{x \in [a,b]} |\omega(x)| \leq (n-1)! \left( \frac{b-a}{n-1} \right)^n \equiv (n-1)! h^n,$$

где через  $h$  обозначен шаг сетки, то есть  $\frac{b-a}{n-1}$

## Ошибка интерполяции на равномерной сетке

Рассмотри равномерную сетку  $x_k = a + \frac{k-1}{n-1}(b-a)$  Оценим максимальное значение функции  $|\omega(x)|$  на ней.

$$\max_{x \in [a,b]} |\omega(x)| \leq (n-1)! \left( \frac{b-a}{n-1} \right)^n \equiv (n-1)! h^n,$$

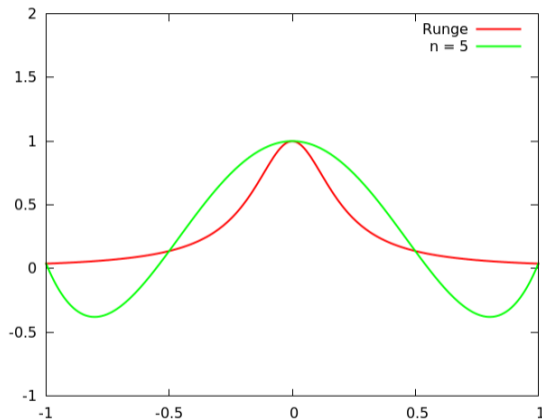
где через  $h$  обозначен шаг сетки, то есть  $\frac{b-a}{n-1}$

Отсюда, погрешность интерполяции, которая является ошибкой метода, равна

$$\varepsilon_{\text{метод}} = \frac{M_n}{n!} \max_{x \in [a,b]} |\omega(x)| \leq \frac{M_n}{n} h^n$$

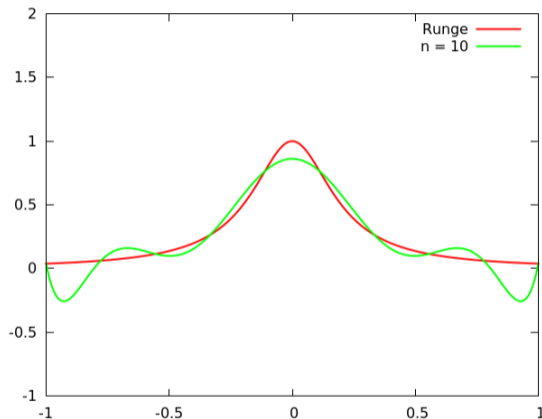
Однако, в ошибке метода фигурирует максимум  $n$ -й производной, который может сильно расти при увеличении  $n$ .

# Интерполяция функции Рунге на равномерной сетке



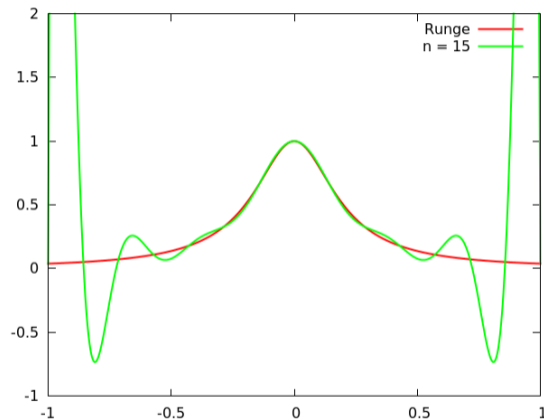
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

# Интерполяция функции Рунге на равномерной сетке



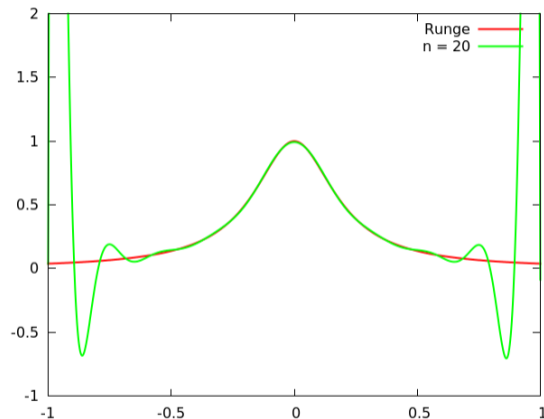
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

# Интерполяция функции Рунге на равномерной сетке



$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

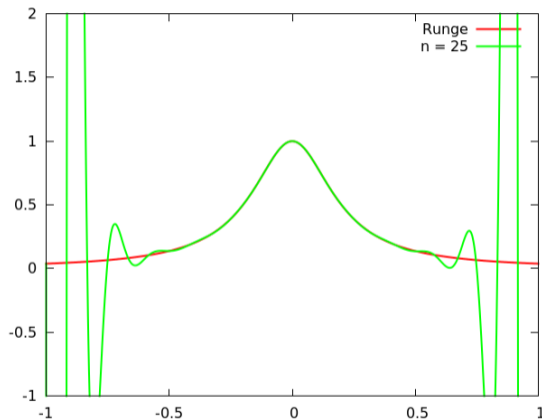
# Интерполяция функции Рунге на равномерной сетке



$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$



# Интерполяция функции Рунге на равномерной сетке



$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

## Оптимальный выбор узлов интерполяции

Посмотрим, насколько возможно уменьшить ошибку интерполяции, только за счет выбора узлов  $x_k$ . (Предполагаем, что можем узнать только  $n$  значений функции, но в тех точках, которые нам интересны).

---

\* *Чебышев П.Л.* О функциях мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменной - Спб.,1881

## Оптимальный выбор узлов интерполяции

Посмотрим, насколько возможно уменьшить ошибку интерполяции, только за счет выбора узлов  $x_k$ . (Предполагаем, что можем узнать только  $n$  значений функции, но в тех точках, которые нам интересны).

Задача состоит в минимизации функции  $\omega(x)$  за счет выбора  $x_k$ .

Если искать минимум максимума модуля  $\omega(x)$ , то такая задача была решена Чебышевым(1881)\*

$$\max_{x \in [a, b]} |(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)| \rightarrow \min_{x_k}$$

---

\* *Чебышев П.Л.* О функциях мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменной - Спб.,1881

## Многочлены Чебышева

Многочленом Чебышева степени  $n$  называется многочлен

$$T_n(x) = \cos n \arccos x = 2^{n-1} x^n + \dots$$

Он является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  среди многочленов с тем же коэффициентом при старшей степени. Чтобы получить решение предыдущей задачи, необходимо этот многочлен отмасштабировать и перевести отрезок  $[-1, 1]$  в  $[a, b]$ .

## Многочлены Чебышева

Многочленом Чебышева степени  $n$  называется многочлен

$$T_n(x) = \cos n \arccos x = 2^{n-1} x^n + \dots$$

Он является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  среди многочленов с тем же коэффициентом при старшей степени. Чтобы получить решение предыдущей задачи, необходимо этот многочлен отмасштабировать и перевести отрезок  $[-1, 1]$  в  $[a, b]$ .

$$\omega(x) = \tilde{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}$$

## Многочлены Чебышева

Многочленом Чебышева степени  $n$  называется многочлен

$$T_n(x) = \cos n \arccos x = 2^{n-1} x^n + \dots$$

Он является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  среди многочленов с тем же коэффициентом при старшей степени. Чтобы получить решение предыдущей задачи, необходимо этот многочлен отмасштабировать и перевести отрезок  $[-1, 1]$  в  $[a, b]$ .

$$\omega(x) = \tilde{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}$$

$$\max_{x \in [a, b]} |\omega(x)| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} = \frac{h^n n^n}{2^{2n-1}} \approx \frac{h^n n! e^n}{2^{2n-1} \sqrt{2\pi n}} = h^n n! \left(\frac{e}{4}\right)^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

Существенное отличие от равномерной сетки в быстро убывающем при  $n \rightarrow \infty$  сомножителе  $\left(\frac{e}{4}\right)^n$

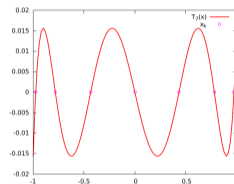
## Сетка из нулей многочлена Чебышева

Узлы сетки  $x_k$  являются корнями  $\omega(x)$ . Оптимальной в смысле минимума ошибки интерполяции будет сетка из узлов  $x_k$ , которые являются корнями  $\omega(x) = \tilde{T}_n(x)$ .

## Сетка из нулей многочлена Чебышева

Узлы сетки  $x_k$  являются корнями  $\omega(x)$ . Оптимальной в смысле минимума ошибки интерполяции будет сетка из узлов  $x_k$ , которые являются корнями  $\omega(x) = \tilde{T}_n(x)$ .

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}$$
$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right)$$



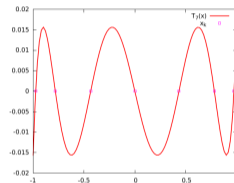


## Сетка из нулей многочлена Чебышева

Узлы сетки  $x_k$  являются корнями  $\omega(x)$ . Оптимальной в смысле минимума ошибки интерполяции будет сетка из узлов  $x_k$ , которые являются корнями  $\omega(x) = \tilde{T}_n(x)$ .

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}$$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right)$$

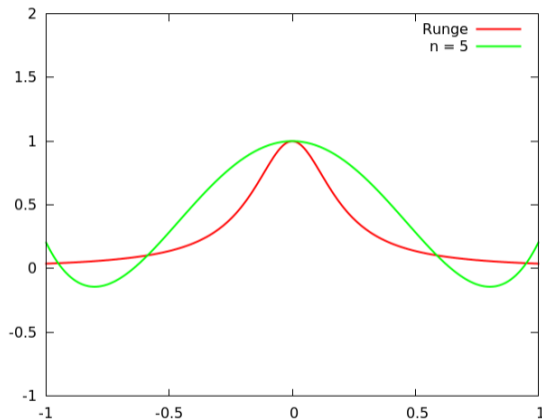


### Теорема

Если функция  $f(x)$  имеет ограниченную производную на отрезке, то последовательность интерполяционных многочленов  $P_n(x)$  на такой сетке сходится равномерно к  $f(x)$ .

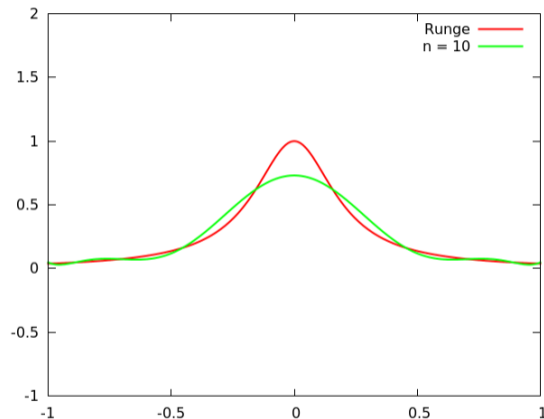
$$P_n(x) \rightrightarrows f(x)$$

# Интерполяция функции Рунге на чебышевской сетке



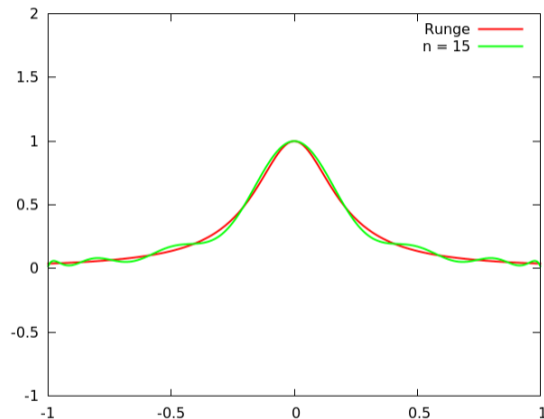
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

# Интерполяция функции Рунге на чебышевской сетке



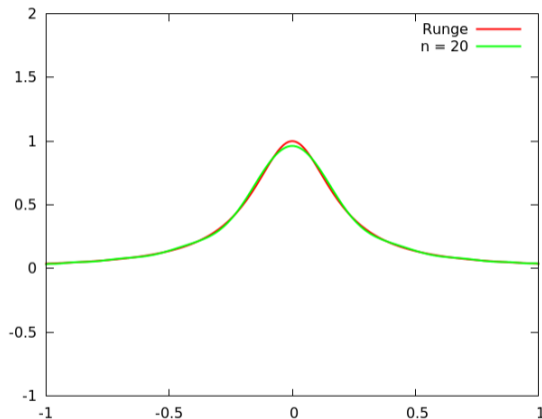
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

# Интерполяция функции Рунге на чебышевской сетке



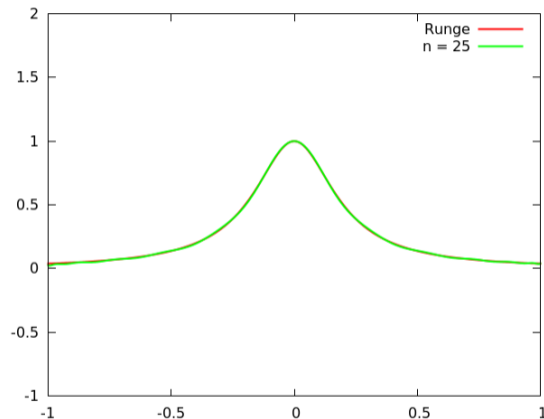
$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

# Интерполяция функции Рунге на чебышевской сетке



$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

# Интерполяция функции Рунге на чебышевской сетке



$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

# Экстраполяция

До сих пор, мы изучали поведение интерполянта в пределах отрезка, на котором заданы точки. Также можно ставить задачу определения значений функции за пределами отрезка, например, спрогнозировать значения функции по уже имеющимся данным.

# Экстраполяция

До сих пор, мы изучали поведение интерполянта в пределах отрезка, на котором заданы точки. Также можно ставить задачу определения значений функции за пределами отрезка, например, спрогнозировать значения функции по уже имеющимся данным. Большая часть формальных выводов, в том числе и погрешности экстраполяции, один-к-одному переносятся из интерполяции. Отличие заключается в расширении отрезка  $[a, b]$ , до отрезка, в который входит точка  $x$ . В свою очередь, оценки для максимумов функции  $\omega(x)$  сильно зависят от изучаемого отрезка.



## Экстраполяция на равномерной сетке

Для оценки ошибки экстраполяции остается верной формула

$$\varepsilon_{\text{метод}} \leq \frac{M_n}{n!} |\omega(x)|$$

Пусть точка  $x$  лежит правее точки  $b$  на  $\delta$ :  $x = b + \delta$

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (\delta + kh) = h^n \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{h} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{h}\right)} \approx \begin{cases} h^n n!, & \delta \lesssim h \\ \delta^n, & \delta \gg h \end{cases}$$

То есть, экстраполяция на расстояния порядка  $h$  имеет погрешность, близкую к погрешности интерполяции, но по мере удаления от конца отрезка, ошибка стремительно растет.

## Экстраполяция на сетке из нулей многочлена Чебышева

В этом случае открывается другое экстремальное свойство многочленов Чебышева.

## Экстраполяция на сетке из нулей многочлена Чебышева

В этом случае открывается другое экстремальное свойство многочленов Чебышева. Наряду с тем, что на данной сетке функция  $\omega(x)$  наименее отклоняется от нуля среди всех многочленов с коэффициентом 1 при старшей степени, эта функция стремительнее всех остальных растет за пределами отрезка  $[a, b]$ .

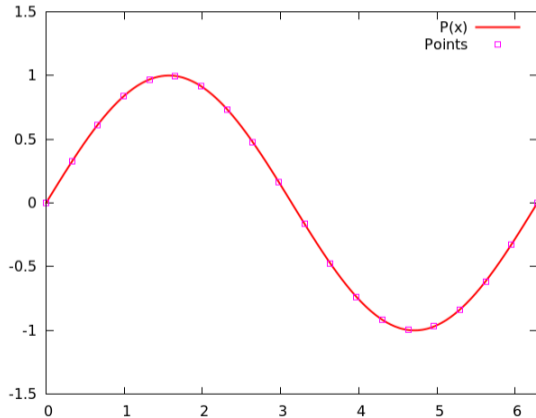
## Экстраполяция на сетке из нулей многочлена Чебышева

В этом случае открывается другое экстремальное свойство многочленов Чебышева. Наряду с тем, что на данной сетке функция  $\omega(x)$  наименее отклоняется от нуля среди всех многочленов с коэффициентом 1 при старшей степени, эта функция стремительнее всех остальных растёт за пределами отрезка  $[a, b]$ .

Таким образом, сетка из нулей многочлена Чебышева оказывается самой плохой в смысле погрешности экстраполяции — оценка для ошибки превышает оценку для ошибки на любой другой сетке.

# Чувствительность интерполяции

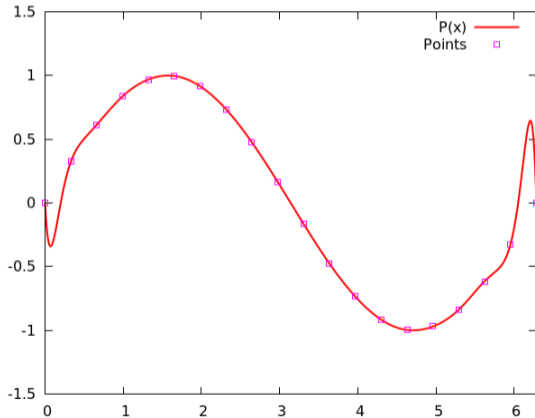
Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них



► К последнему кадру

# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них

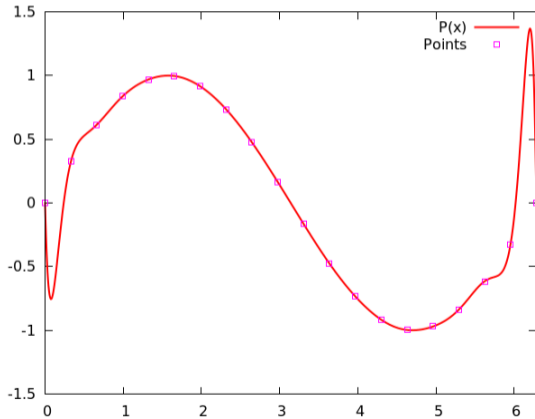


▶ К первому кадру

▶ К последнему кадру

# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них

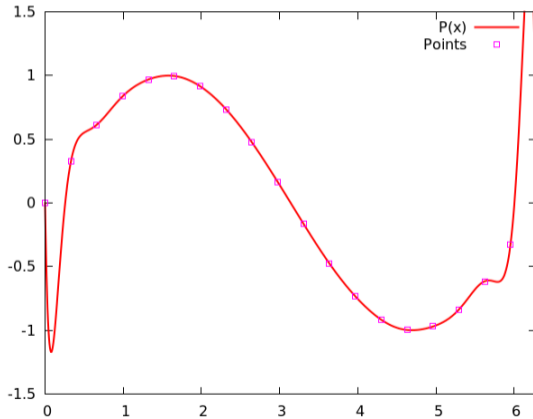


▶ К первому кадру

▶ К последнему кадру

# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них



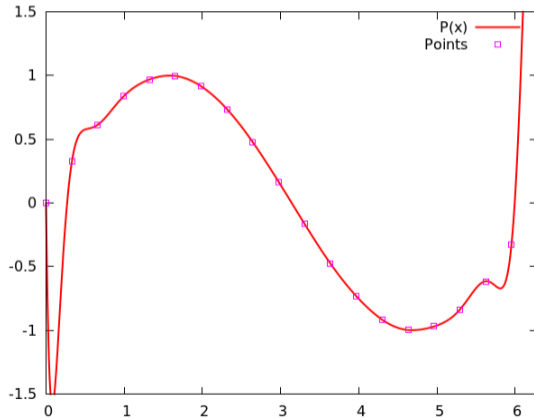
▶ К первому кадру

▶ К последнему кадру



# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них

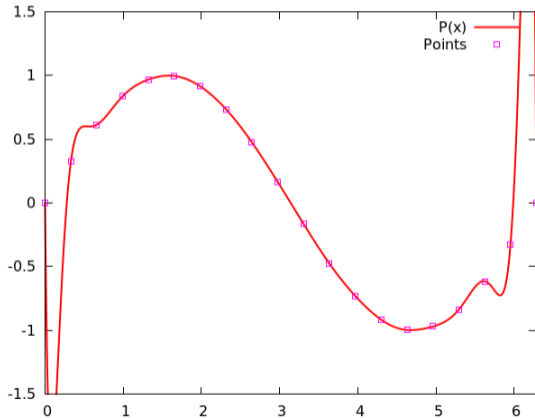


▶ К первому кадру

▶ К последнему кадру

# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них

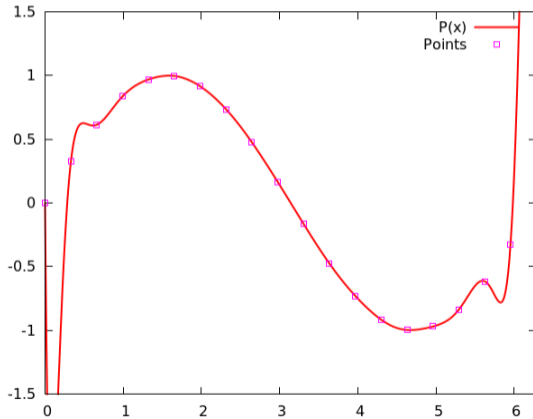


▶ К первому кадру

▶ К последнему кадру

# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них

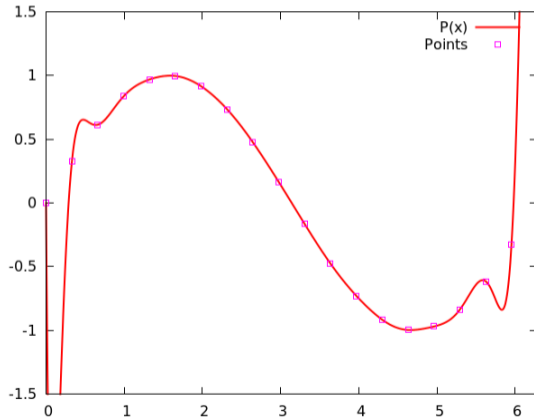


▶ К первому кадру

▶ К последнему кадру

# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них

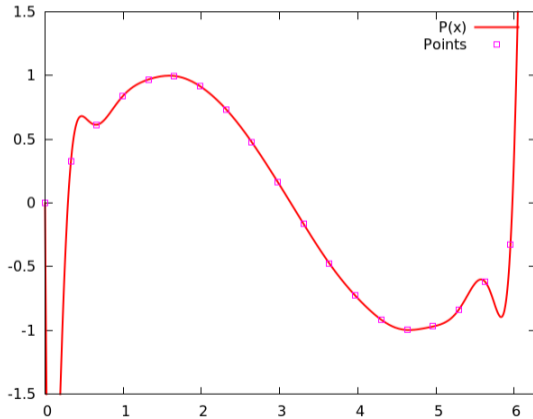


▶ К первому кадру

▶ К последнему кадру

# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них

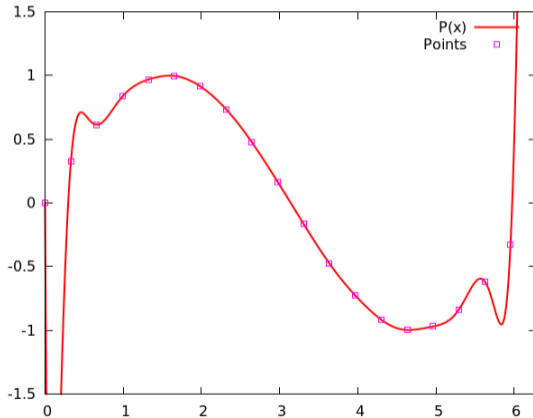


▶ К первому кадру

▶ К последнему кадру

# Чувствительность интерполяции

Возьмем 20 точек функции  $\sin x$  и чуть-чуть (на доли процента) пошевелим значение функции в одной из них



▶ К первому кадру

## Чувствительность интерполяции

Вспомним выражение для интерполяционного многочлена в форме Лагранжа

$$P(x) = \sum_{j=1}^n f_j l_j(x)$$

«Пошевелив»  $f_k$  на  $\delta f_k$ , мы тем самым «пошевелили» интерполянт на

$$\delta P(x) = \sum_{j=1}^n (f_j + \delta f_j) l_j(x) - \sum_{j=1}^n f_j l_j(x) = \sum_{j=1}^n \delta f_j l_j(x)$$

Поскольку конкретное направление шевеления (в большую или меньшую сторону) обычно неизвестно, а известно только абсолютное значение, можно написать оценку

$$|\delta P(x)| \leq \sum_{j=1}^n |\delta f_j| |l_j(x)|$$

## Функция Лебега и константа Лебега

Рассмотрим случай, когда все  $|\delta f_k|$  одинаковы и равны  $\delta f$ :

$$|\delta P(x)| \leq \delta f \sum_{j=1}^n |\ell_j(x)|$$

Сумма  $\sum_{j=1}^n |\ell_j(x)|$  зависит только от сетки, называется *функцией Лебега* этой сетки и обозначается  $L(x)$ . В случае, когда интересуется максимальное отклонение интерполанта по всему отрезку, вводят максимум функции Лебега, который называется *константой Лебега* и обозначается  $L$

$$|\delta P(x)| \leq L(x)\delta f$$

$$|\delta P| \leq \max_{x \in [a,b]} L(x)\delta f \equiv L\delta f$$



## Функция Лебега равномерной сетки

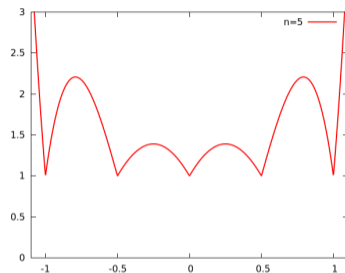


Рис. 1: При  $n = 5$  константа Лебега  $L \approx 2.25$

Для равномерной сетки константа Лебега  $L$  растет как  $L \sim \frac{2^n}{e^{(n-1)} \ln(n-1)}$ .

# Функция Лебега равномерной сетки

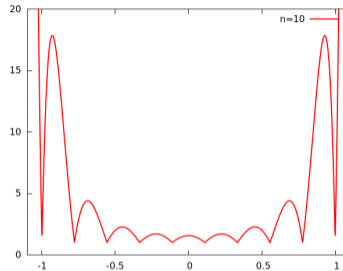


Рис. 1: При  $n = 10$  константа Лебега  $L \approx 18$

Для равномерной сетки константа Лебега  $L$  растет как  $L \sim \frac{2^n}{e^{(n-1)} \ln(n-1)}$ .

# Функция Лебега равномерной сетки

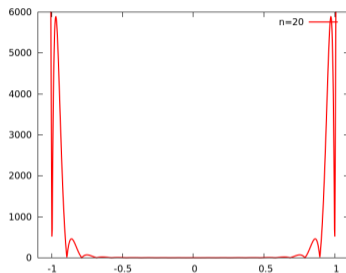


Рис. 1: При  $n = 20$  константа Лебега  $L \approx 6000$

Для равномерной сетки константа Лебега  $L$  растет как  $L \sim \frac{2^n}{e^{(n-1)} \ln(n-1)}$ .

# Функция Лебега равномерной сетки

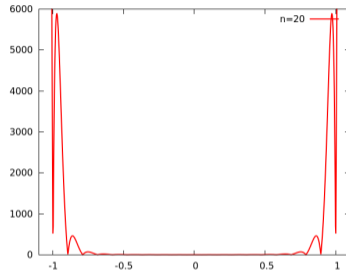


Рис. 1: При  $n = 20$  константа Лебега  $L \approx 6000$

Для равномерной сетки константа Лебега  $L$  растет как  $L \sim \frac{2^n}{e^{(n-1)\ln(n-1)}}$ .

Также видно, что за пределами отрезка функция Лебега растет еще быстрее. Это означает что задача экстраполяции крайне чувствительна к заданию точных значений в узлах.

# Функция Лебега сетки из нулей многочлена Чебышева

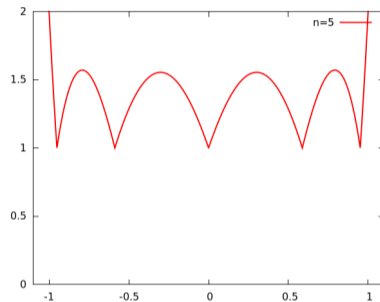


Рис. 2: При  $n = 5$  константа Лебега  $L \approx 1.6$

Для этой сетки константа Лебега  $L$  растет как  $L \sim \frac{2}{\pi} \ln n$ .

## Функция Лебега сетки из нулей многочлена Чебышева

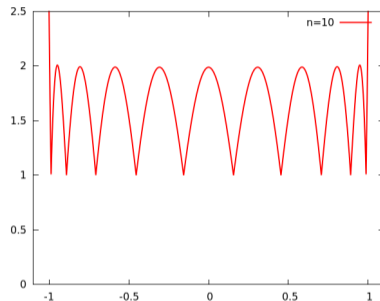


Рис. 2: При  $n = 10$  константа Лебега  $L \approx 2$

Для этой сетки константа Лебега  $L$  растет как  $L \sim \frac{2}{\pi} \ln n$ .

Использование сетки из нулей многочлена Чебышева позволяет сильно снизить требования к точности задания функции в узлах.

# Функция Лебега сетки из нулей многочлена Чебышева

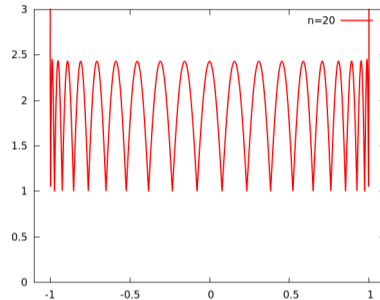


Рис. 2: При  $n = 20$  константа Лебега  $L \approx 2.5$

Для этой сетки константа Лебега  $L$  растет как  $L \sim \frac{2}{\pi} \ln n$ .

Использование сетки из нулей многочлена Чебышева позволяет сильно снизить требования к точности задания функции в узлах.

## Проблемы глобальной интероляции

Глобальная алгебраическая интерполяция при большом количестве узлов начинают испытывать проблемы при быстром росте констант  $M_n$  и весьма чувствительна к заданию функции в узлах.



## Проблемы глобальной интероляции

Глобальная алгебраическая интерполяция при большом количестве узлов начинают испытывать проблемы при быстром росте констант  $M_n$  и весьма чувствительна к заданию функции в узлах.

Одно из решений — проводить не глобальную, а локальную интерполяцию, по небольшому количеству соседних узлов. Такой интерполянт называется сплайном.

## Проблемы глобальной интероляции

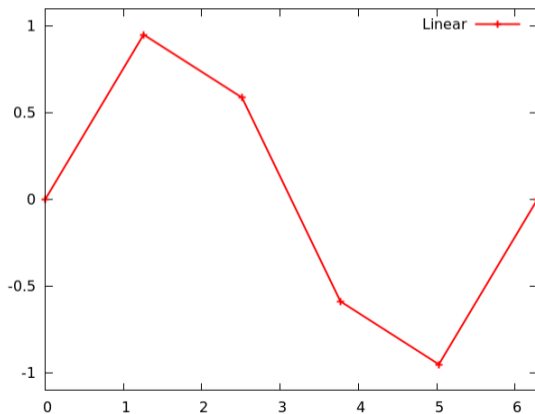
Глобальная алгебраическая интерполяция при большом количестве узлов начинают испытывать проблемы при быстром росте констант  $M_n$  и весьма чувствительна к заданию функции в узлах.

Одно из решений — проводить не глобальную, а локальную интерполяцию, по небольшому количеству соседних узлов. Такой интерполянт называется сплайном.

- *Степенью сплайна* называется степень многочлена на каждом отрезке.
- *Гладкостью сплайна* называется количество непрерывных производных у функции на всем отрезке
- *Дефектом сплайна* называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

## Кусочно-линейная интерполяция

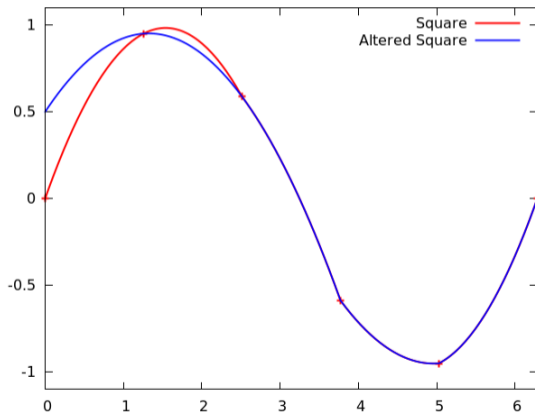
Простейшая кусочно-многочленная интерполяция — кусочно линейная. Функция на каждом отрезке приближается линейной.



Степень — 1  
Гладкость — 0  
Дефект — 1

# Кусочно-квадратичная интерполяция

Построим на каждом отрезке параболу по трем ближайшим точкам.



Степень — 2  
Гладкость — 0  
Дефект — 2

## Гладкая кусочно-квадратичная интерполяция

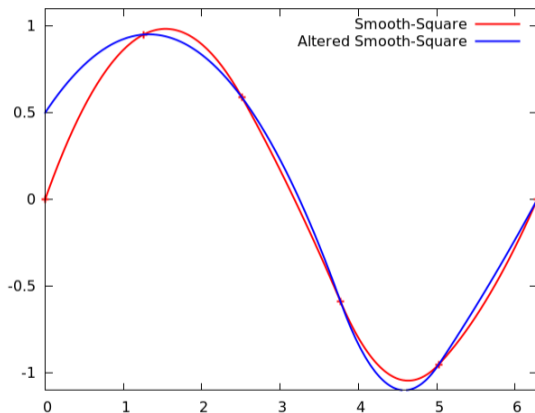
Построим по трем первым точкам параболу, а на следующих отрезках будем строить параболу, проходящую через концы отрезка и гладко продолжающую параболу на предыдущем отрезке.

Пусть  $P_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k$ ,  $q_k = P'_{k-1}(x_k)$

$$\begin{cases} a_k x_k^2 + b_k x_k + c_k & = f_k \\ a_k x_{k+1}^2 + b_k x_{k+1} + c_k & = f_{k+1} \\ 2a_k x_k + b_k & = q_k \end{cases}$$

Данный метод позволяет строить сплайны любой степени с дефектом 1. Частный случай степени 3 называется сплайном Шонберга.

# Гладкая кусочно-квадратичная интерполяция



Степень — 2  
Гладкость — 1  
Дефект — 1

Удалось добиться гладкости сплайна, но при этом исчезло свойство локальности: при изменении какого-нибудь значения функции изменяется весь сплайн. Конечно, изменение

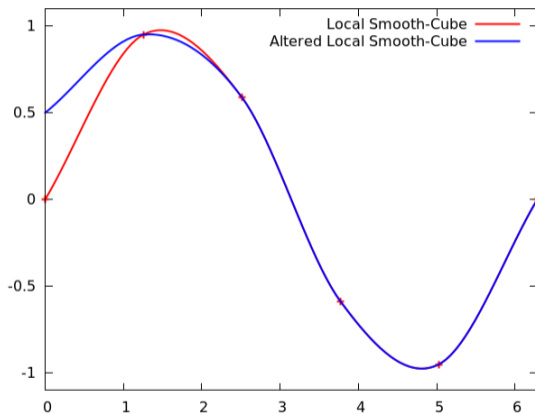
## Локальные гладкие сплайны

Возьмем за основу негладкий сплайн  $P(x)$  (например кусочно-линейный). На каждом отрезке будем искать кубическую параболу  $Q_k(x)$ , которая проходит через его концы, на левом конце производная совпадает с  $P'(x_k + 0)$ , а на правом — с  $P'(x_{k+1} + 0)$ . Таким образом, производная сплайна будет непрерывной, а для вычисления интерполянта на отрезке используются только 3 ближайшие точки

$$\begin{cases} Q'_k(x_k) & = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \\ Q'_k(x_{k+1}) & = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} \\ Q_k(x_k) & = f_k \\ Q_k(x_{k+1}) & = f_{k+1} \end{cases}$$

Таким образом можно строить локальные сплайны степени  $2s + 1$  при гладкости  $s$ .

# Гладкая локальная кусочно-кубическая интерполяция



Степень — 3  
Гладкость — 1  
Дефект — 2

Сплайн получился гладкий и сохранил свойство локальности. Такие локальные сплайны называются сплайнами В.С. Рябенюкого.



Спасибо за внимание!

Цыбулин Иван  
e-mail: [tsybulin@crec.mipt.ru](mailto:tsybulin@crec.mipt.ru)