Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Скалько Юрий Иванович
Цыбулин Иван

Задача Коши для ОДУ

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение 1го порядка и начальное условие

$$\frac{dy(t)}{dt} = G(t, y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

Требуется найти решение $y(t)$ при $t \in [0, T]$

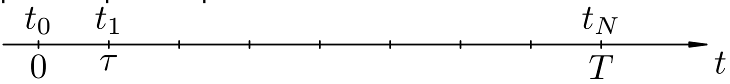
Приближение непрерывной функции

Решением задачи коши является некоторая непрерывная функция $y(t)$.
Поскольку вычислительная техника не может работать с произвольными непрерывными функциями, требуется упростить вид функции решения $y(t)$.

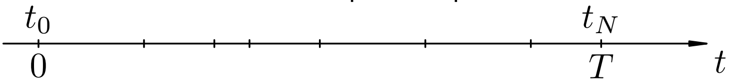
Сетка

Введем на отрезке $[0, T]$, на котором решается задача Коши, сетку из точек t_n.

- Если $\tau = t_{n+1} - t_n$ одинаков для всех n, то сетка называется равномерной. При этом шаг сетки τ является постоянным.



- Иначе, сетка называется неравномерной

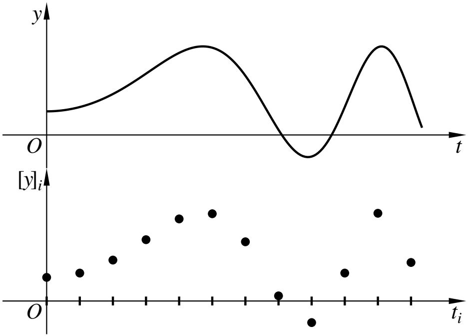


Сеточная функция

Сеточная функция, в отличие от непрерывной, является элементом конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$

Операция получения из непрерывной функции $y(t)$ сеточной функции $\mathbf{u}$ называется *проецированием* и обозначается квадратными скобками.

$$u_n = y(t_n) = [y]_n$$



Операторная форма записи

Задачу Коши

$$\frac{dy(t)}{dt} = G(t, y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

можно записать в операторном виде

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

Оператор $\mathcal{L}$ состоит из дифференциального оператора и начального условия

$$\mathcal{L}y(t) = \begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} - G(t, y(t)) \\ y(0) \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 \\ y_0 \end{cases}$$

Разностная задача

Поскольку неизвестной функцией является теперь *сеточная функция* $[y]$ необходимо переформулировать исходную задачу Коши для непрерывной функции, в некоторую, похожую, *разностную* задачу.

Разностная задача

Поскольку неизвестной функцией является теперь *сеточная функция* $[y]$ необходимо переформулировать исходную задачу Коши для непрерывной функции, в некоторую, похожую, *разностную* задачу.
По аналогии с общим видом задачи Коши

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

рассмотрим разностную задачу

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{g}$ — сеточные функции, а $\mathcal{L}^{(\tau)}$ — разностный оператор

Допустим имеется дифференциальная задача Коши

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

и разностная задача

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

- Как убедиться, что эти задачи действительно «похожи», и главное, что «похожи» *решения* этих задач?

Допустим имеется дифференциальная задача Коши

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

и разностная задача

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

- Как убедиться, что эти задачи действительно «похожи», и главное, что «похожи» *решения* этих задач?
- Как вообще можно сравнить между собой непрерывную функцию $y(t)$ и сеточную функцию $\mathbf{u}$?

Сравнение решений

Сравнивать решения разных задач из разных пространств напрямую невозможно.
Вместо этого необходимо перевести решения в некоторое другое пространство и сравнивать уже элементы одного и того же пространства.

Сравнение решений

Сравнивать решения разных задач из разных пространств напрямую невозможно.
Вместо этого необходимо перевести решения в некоторое другое пространство и сравнивать уже элементы одного и того же пространства.
Оказывается, удобно сравнивать решения именно в пространстве сеточных функций. Для этого необходимо перевести непрерывное решение $y(t)$ в пространство сеточных функций. Операция проектирования как раз и служит для этого

$$y(t) \longrightarrow [y]$$

Сходимость

Можно легко сравнить проекцию решения дифференциальной задачи $[y]_n$ и решение разностной задачи u_n.

$$\varepsilon = \|[y] - \mathbf{u}\| = \max_n |[y]_n - u_n|$$

При изменении шага сетки τ будут получаться различные разностные задачи с различными решениями $\mathbf{u}^{(\tau)}$.

$$\varepsilon^{(\tau)} = \|[y] - \mathbf{u}^{(\tau)}\| = \max_n |[y]_n - u_n^{(\tau)}|$$

Если $\varepsilon^{(\tau)} \to 0$ при $\tau \to 0$, то говорят о *сходимости* решений разностной задачи к решению дифференциальной задачи. Если при этом $\varepsilon^{(\tau)} = O(\tau^k)$, то говорят о сходимости k-го порядка

Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

и разностную задачу

$$u_{n+1} = (1 + \tau)u_n, \quad u_0 = 1, \quad n = \overline{0, N}, \quad \tau = \frac{T}{N}$$

Решения обеих задач легко находятся: $y(t) = e^t$ и $u_n = (1 + \tau)^n$

$$\varepsilon^{(\tau)} = e^T - (1 + \tau)^N = e^T - e^{N \ln(1+\tau)} =$$

$$= e^T - e^{T - \frac{T\tau}{2} + o(\tau)} = e^T \left(1 - e^{1 - \frac{\tau}{2} + o(\tau)}\right) = \frac{e^T}{2}\tau + o(\tau) = O(\tau)$$

Решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи с первым порядком

Сходимость

Наличие сходимости позволяет находить решение дифференциальной задачи с любой точностью, взяв в качестве решения решение разностной задачи.

Например, в примере для вычисления $y(1)$ можно было взять u_N при достаточно большом N.

Сходимость

Наличие сходимости позволяет находить решение дифференциальной задачи с любой точностью, взяв в качестве решения решение разностной задачи.

Например, в примере для вычисления $y(1)$ можно было взять u_N при достаточно большом N.

Однако, напрямую проверять сходимость бессмысленно, так как требуется иметь решение исходной дифференциальной задачи.

Рассмотрим другие свойства, которые можно проверить не обладая точным решением

Аппроксимация

Аппроксимация показывает насколько хорошо решение дифференциальной задачи

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

удовлетворяет разностной задаче

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Аппроксимация

Аппроксимация показывает насколько хорошо решение дифференциальной задачи

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

удовлетворяет разностной задаче

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Поскольку решение дифференциальной задачи является непрерывной функцией, а разностная задача сформулирована в терминах сеточной функции, необходимо вначале спроецировать решение $y(t)$ на сетку, а уже после этого подставлять в разностную задачу $\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$

Аппроксимация

Аппроксимация показывает насколько хорошо решение дифференциальной задачи

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

удовлетворяет разностной задаче

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Поскольку решение дифференциальной задачи является непрерывной функцией, а разностная задача сформулирована в терминах сеточной функции, необходимо вначале спроецировать решение $y(t)$ на сетку, а уже после этого подставлять в разностную задачу $\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$ Поскольку, в общем случае, такая функция не обязана быть решением разностной задачи, в правой части появится невязка

$$\mathcal{L}^{(\tau)}[y] = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$$

Ошибка аппроксимации

$$\mathcal{L}^{(\tau)}[y] = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$$

Величина невязки в правой части называется ошибкой аппроксимации

$$\delta g = \|\delta\mathbf{g}\|$$

Если эта величина стремится к нулю при $\tau \to 0$, то говорят что разностная задача *аппроксимирует* дифференциальную, а если дополнительно $\delta g = O(\tau^k)$, то говорят, что имеет место аппроксимация k-го порядка

Ошибка аппроксимации

$$\mathcal{L}^{(\tau)}[y] = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$$

Величина невязки в правой части называется ошибкой аппроксимации

$$\delta g = \|\delta\mathbf{g}\|$$

Если эта величина стремится к нулю при $\tau \to 0$, то говорят что разностная задача *аппроксимирует* дифференциальную, а если дополнительно $\delta g = O(\tau^k)$, то говорят, что имеет место аппроксимация k-го порядка
Но исходя из определения не ясно, как найти ошибку аппроксимации не обладая точным решением $y(t)$ или его проекцией $[y]$

Нахождение ошибки аппроксимации

Выберем произвольную точку t^*. Удачный выбор точки позволит впоследствии сильно сократить объем вычислений.
Разностный оператор $\mathcal{L}^{(\tau)}$ действуя на сеточную функцию $[y]$, на самом деле, действует на значения $y(t_n)$. Каждое из этих значений можно представить по формуле Тейлора в виде

$$y(t_n) = y(t^*) + (t_n - t^*)y'(t^*) + \frac{(t_n - t^*)^2}{2}y''(t^*) + \cdots + \frac{(t_n - t^*)^k}{k!}y^{(k)}(\xi_n)$$

Отметим, что все производные функции $y(t)$ взяты в одной и той же точке t^*. Вспомним, что $y(t)$ является на самом деле решением задачи Коши, поэтому

$$\begin{aligned} y'(t^*) &= G(t^*, y(t^*)) \\ y''(t^*) &= G_t(t^*, y(t^*)) + G_y(t^*, y(t^*))G(t^*, y(t^*)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Нахождение ошибки аппроксимации

Итак, имея представление в виде формулы Тейлора

$$y(t_n) = y(t^*) + (t_n - t^*)y'(t^*) + \frac{(t_n - t^*)^2}{2} y''(t^*) + \dots + \frac{(t_n - t^*)^k}{k!} y^{(k)}(\xi_n)$$

а также связи

$$\begin{aligned} y'(t^*) &= G(t^*, y(t^*)) \\ y''(t^*) &= G_t'(t^*, y(t^*)) + G_y'(t^*, y(t^*))G(t^*, y(t^*)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

можно выразить ошибку аппроксимации δg_n как

$$\delta g_n = F_0(y(t^*)) + \tau F_1(y(t^*)) + \dots + \frac{\tau^{k-1}}{k-1!} F_{k-1}(y(t^*)) + O(\tau^k)$$

Если все функции $F_0(y), F_1(y), ..., F_k(y)$ тождественно равны нулю, то ошибка аппроксимации будет иметь порядок $O(\tau^k)$

Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

и разностную задачу

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \tau \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left(u_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin u_n\right), \quad u_0 = 1$$

Подставим $\mathbf{u} = [y]$

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left([y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin[y]_n\right) + \delta g_{n+1}$$
$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Заметим, что начальное условие является частью разностного оператора и тоже может иметь невязку!

Пример

Задача Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Разностная задача

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left([y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin[y]_n\right) + \delta g_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Представим $[y]_{n+1}$ в виде формулы Тейлора в окрестности точки t_n

$$[y]_{n+1} = [y]_n + \tau[y']_n + \frac{\tau^2}{2}[y'']_n + O(\tau^3)$$

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = [y']_n + \frac{\tau}{2}[y'']_n + O(\tau^2)$$

Пример

Задача Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Разностная задача

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \left([y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n\right) + \delta g_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Воспользуемся дифференциальным уравнением

$$[y']_n = n\tau \sin [y]_n = O(1) \qquad (n = O(\tau^{-1}))$$

$$[y'']_n = \sin [y]_n + (n\tau)^2 \cos [y]_n \sin [y]_n = O(1)$$

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = [y']_n + \frac{\tau}{2}[y'']_n + O(\tau^2) =$$

$$= n\tau \sin [y]_n + \frac{\tau}{2}\left(\sin [y]_n + (n\tau)^2 \cos [y]_n \sin [y]_n\right) + O(\tau^2)$$

Пример

Задача Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Разностная задача

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left([y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n\right) + \delta g_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Представим правую часть в виде формулы Тейлора

$$\tau\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left([y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n\right) =$$

$$= (n\tau) \sin [y]_n + \frac{\tau}{2} \sin [y]_n + \frac{\tau}{2} (n\tau)^2 \cos [y]_n \sin [y]_n + O(\tau^2)$$

Пример

Задача Коши

$$y' = t\sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Разностная задача

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau\left(n + \frac{1}{2}\right)\sin\left([y]_n + \frac{\tau^2 n}{2}\sin[y]_n\right) + \delta g_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Сравнивая разложения для правой и левой частей, получаем

$$\delta g_0 = 0$$

$$\delta g_{n+1} = O(\tau^2)$$

$$\delta g = \|\delta \mathbf{g}\| = O(\tau^2)$$

Разностная задача аппроксимирует дифференциальную со вторым порядком

Аппроксимация начальных условий

Не стоит забывать проверять аппроксимацию начальных условий. Хотя в предыдущем примере аппроксимация с любым порядком начального условия была очевидна, так бывает не всегда. Например, изменив в разностной задаче начальное условие с

$$u_0 = 1$$

на

$$u_0 = 1 + 2\tau$$

мы бы все равно получили аппроксимирующую задачу, но порядок аппроксимации был бы уже первый, так как

$$\delta g_0 = 2\tau = O(\tau)$$
$$\delta g_{n+1} = O(\tau^2)$$

$$\delta g = \|\delta g_n\| = O(\tau)$$

Устойчивость

При проверке аппроксимации мы убеждаемся, что решение $[y]$ «почти» удовлетворяет задаче

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Рассмотрим возмущенную задачу

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$$

Эти задачи отличаются только небольшим возмущением правой части. Если это возмущение не сильно повлияет на решение, можно утверждать, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. Если допустить единственность решения возмущенной задачи, то

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{v} = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} = \mathcal{L}^{(\tau)}[y]$$

и $[y] = \mathbf{v}$, а следовательно и $\mathbf{u} \approx [y]$.

Устойчивость

Введем понятие *устойчивой* разностной задачи. Задача

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

называется устойчивой, если для для небольших возмущений δg_n задача

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$$

имеет единственное решение v_n, причем

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < C\|\delta\mathbf{g}\|$$

а константа C не зависит от τ

Теорема Рябенького-Филиппова-Лакса

Основная теорема вычислительной математики

Пусть устойчивая с коэффициентом C разностная задача

$$\mathcal{L}^{(\tau)}\mathbf{u} = \mathbf{g}$$

аппроксимирует задачу

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

с ошибкой аппроксимации $\|\delta\mathbf{g}\| = \delta g < D\tau^k$. Тогда решения разностной задачи сходятся к решению дифференциальной, причем для ошибки сходимости справедлива оценка

$$\varepsilon^{(\tau)} < CD\tau^k \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Исследование устойчивости

В отличие от нахождения ошибки аппроксимации, единого способа проверки устойчивости нет.
Докажем устойчивость разностной задачи

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = G\left(t_n + \frac{\tau}{2}, u_n + \frac{\tau}{2} G(t_n, u_n)\right), \quad u_0 = y_0$$

в предположении, что по второму аргументу функция G Липшицева, то есть

$$|G(t, u) - G(t, v)| < L|u - v|$$

Введем функцию

$$F(t, u, \tau) = u + \tau G\left(t + \frac{\tau}{2}, u + \frac{\tau}{2} G(t, u)\right)$$

Исследование устойчивости

$$F(t, u, \tau) = u + \tau G\left(t + \frac{\tau}{2}, u + \frac{\tau}{2} G(t, u)\right)$$

Функция $F(t, u, \tau)$ также Липшицева по u

$$|F(t, u, \tau) - F(t, v, \tau)| < |u - v| \left(1 + L\tau\left(1 + \frac{L\tau}{2}\right)\right) < e^{L\tau}|u - v|$$

Разностную задачу можно переписать в виде

$$u_{n+1} = F(t_n, u_n, \tau), \quad u_0 = y_0$$

При возмущении исходной задачи на δg получается задача

$$v_{n+1} = F(t_n, v_n, \tau) + \tau\delta g_{n+1}, \quad v_0 = y_0 + \delta g_0$$

Отметим множитель τ перед δg_{n+1}. Он появился при умножении исходной задачи на τ

Исследование устойчивости

$$|F(t,u,\tau) - F(t,v,\tau)| < e^{L\tau}|u - v|$$

$$u_{n+1} = F(t_n, u_n, \tau), \quad u_0 = y_0$$
$$v_{n+1} = F(t_n, v_n, \tau) + \tau\delta g_{n+1}, \quad v_0 = y_0 + \delta g_0$$

Справедлива следующая цепочка оценок

$$|u_0 - v_0| = |\delta g_0|$$
$$|u_1 - v_1| = |F(t_0, u_0, \tau) - F(t_0, v_0, \tau) - \tau\delta g_1| < e^{L\tau}|\delta g_0| + \tau|\delta g_1|$$
$$|u_2 - v_2| = |F(t_1, u_1, \tau) - F(t_1, v_1, \tau) - \tau\delta g_2| < e^{2L\tau}|\delta g_0| + e^{L\tau}\tau|\delta g_1| + \tau|\delta g_2|$$

$$|u_n - v_n| < e^{nL\tau}|\delta g_0| + \frac{e^{nL\tau} - 1}{e^{L\tau} - 1}\tau \max_{n>0}|\delta g_n|$$

$$\|u_n - v_n\| \lesssim e^{LT}|\delta g_0| + \frac{e^{LT} - 1}{L}\max_{n>0}|\delta g_n| \le \max\left(e^{LT}, \frac{e^{LT} - 1}{L}\right)\|\delta g\|$$

Исследование устойчивости

Для данной задачи единственность решения очевидна (все неизвестные u_n вычисляются последовательно), а константой устойчивости будет

$$\max\left(e^{CT}, \frac{e^{CT}-1}{C}\right)$$

Заметим, что от τ она не зависит. По определению, данная задача устойчива.

Спасибо за внимание!

Цыбулин Иван
e-mail: tsybulin@crec.mipt.ru