Волновое уравнение

Скалько Юрий Иванович
Цыбулин Иван
Шевченко Александр

Волновое уравнение второго порядка

Волновое уравнение в форме уравнения второго порядка записаывается как

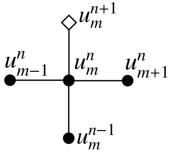
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

Дополним уравнение до начально-краевой задачи

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \theta(x)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi(t)$$
$$u\big|_{x=1} = \chi(t)$$

Схема «крест»

Аппроксимация на шаблоне крест получается при замене вторых производных их разностными аналогами. Порядок аппроксимации уравнения второй по пространству и времени.



$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f_m^n$$

Простейшая аппроксимация граничных и начальных условий

$$u_m^0 = \varphi_m + O(\tau^\infty + h^\infty)$$

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \theta_m + O(\tau + h^\infty)$$

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{h} = \psi^n + O(\tau^\infty + h)$$

$$u_M^n = \chi^n + O(\tau^\infty + h^\infty)$$

Повышение порядка начальных условий

Вынесем из $O(\cdot)$ члены первого порядка

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \theta_m + \frac{\tau}{2}[u_{tt}]_m^0 + O(\tau^2 + h^\infty)$$

Необходимо аппроксимировать u_{tt} хотя бы с первым порядком по τ в точке (t_0, x_m). Например, можно подставить

$$[u_{tt}]_m^0 = c^2[\varphi'']_m + f_m^0 + O(\tau^\infty + h^\infty)$$

(уравнение при $t = 0$) если $\varphi(x)$ задана аналитически или

$$[u_{tt}]_m^0 = c^2 \frac{\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}}{h^2} + f_m^0 + O(\tau^\infty + h^2)$$

если производную вычислить сложно. В результате

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \theta_m + \frac{\tau}{2}\left\{c^2 \frac{\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}}{h^2} + f_m^0\right\} + O(\tau^2 + \tau h^2)$$

Повышение порядка грачничных условий

Вынесем из $O(\cdot)$ члены первого порядка

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{h} = \psi^n + \frac{h}{2}[u_{xx}]_0^n + O(\tau^\infty + h^2)$$

Необходимо аппроксимировать u_{xx} хотя бы с первым порядком по h в точке $(t_n, 0)$. Например, можно подставить

$$[u_{xx}]_0^n = \frac{u_2^n - 2u_1^n + u_0^n}{h^2} + O(h + \tau^\infty)$$

(в крайних точках формула первого порядка). В результате

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{h} = \psi^n + \frac{u_2^n - 2u_1^n + u_0^n}{2h} + O(\tau^\infty + h^2)$$

Это уравнение легко разрешается относительно u_0^n. Необходимые значения u_1^n и u_2^n уже должны быть посчитаны по схеме «крест» из временных слоев $n-1$ и $n-2$.

Устойчивость схемы «крест»

Исследуем схему «крест» на устойчивость по спектральному признаку. Подставим $u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$

$$\frac{\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}}{\tau^2} = \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} = -\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda^2 - 2\left(1 - \frac{2\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1\lambda_2 = 1$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{2\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)^2 - 1 = \frac{2\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2\tau^2}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\right)$$

При $D > 0$ корни действительные и хотя бы одно из чисел $|\lambda_1|, |\lambda_2|$ больше единицы. При отрицательном D корни комплексно сопряжены и оба по модулю равны 1. Схема устойчива при $D < 0$, то есть при $\tau < h$

Волновое уравнение в виде системы первого порядка

Введем $v = u_t, w = u_x$. В этих обозначениях волновое уравнение можно записать как систему

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем левые собственные вектора $\boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i^T$ (собственные вектора транспонированной матрицы)

$$\begin{pmatrix} 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} 1 & c \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -c$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & -c \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = c$$

Умножим систему слева на $\boldsymbol{\omega}_i^T$

Система в инвариантах

При умножении на левые собственные вектора система распадается на отдельные уравнения переноса

$$\frac{\partial(v+cw)}{\partial t} - c\frac{\partial(v+cw)}{\partial x} = f$$
$$\frac{\partial(v-cw)}{\partial t} + c\frac{\partial(v-cw)}{\partial x} = f$$

Любая система гиперболического типа

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{f}$$

при умножении на левый собственный вектор $\boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \boldsymbol{\omega}_i^T$ распадается на уравнения переноса

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{u})}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{u})}{\partial x} = (\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{f})$$

Скалярные величины $r_i = (\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{u})$ называются *инвариантами Римана*

Схема для уравнения

Поскольку система уравнений распалась на независимые уравнения переноса, напишем для каждого уравнения переноса схему явный левый или явный правый уголок, в зависимости от $\lambda_i > 0$ или $\lambda_i < 0$.

$$\frac{(r_i)_m^{n+1} - (r_i)_m^n}{\tau} + \lambda_i \frac{(r_i)_m^n - (r_i)_{m-1}^n}{h} = (\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{f})_m^n, \;\; m = \overline{1, M}, \;\; \lambda_i > 0$$

$$\frac{(r_i)_m^{n+1} - (r_i)_m^n}{\tau} + \lambda_i \frac{(r_i)_{m+1}^n - (r_i)_m^n}{h} = (\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{f})_m^n, \;\; m = \overline{0, M-1}, \lambda_i < 0$$

Если $\lambda_i = 0$, то уравнение переноса вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = (\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{f}),$$

которое решается при всех значениях m

$$\frac{(r_i)_m^{n+1} - (r_i)_m^n}{\tau} = (\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{f})_m^n, \quad m = \overline{0, M}$$

Для численного решения системы необходимы начальные и граничные условия. Поскольку уравнения аппроксимированы с первым порядком (уголками), то достаточно потребовать первого порядка аппроксимации граничных условий. Рассмотрим сколько необходимо граничных условий для волнового уравнения. Запишем схемы для инвариантов

$$\frac{(r_1)_m^{n+1} - (r_1)_m^n}{\tau} - c\frac{(r_1)_{m+1}^n - (r_1)_m^n}{h} = f_m^n, \quad m = \overline{0, M-1}$$
$$\frac{(r_2)_m^{n+1} - (r_2)_m^n}{\tau} + c\frac{(r_2)_m^n - (r_2)_{m-1}^n}{h} = f_m^n, \quad m = \overline{1, M}$$

По этим схемам нельзя определить r_1 при $m = M$ и r_2 при $m = 0$. Эти значения необходимо найти из граничных условий. Значит, необходимо по одному граничному условию на каждой границе.

Схема для граничных узлов

Зададим, для примера, следующие граничные условия (по 1му на каждой границе)

$$v|_{x=0} = 0$$
$$(v - cw)|_{x=1} = 1$$

Попробуем с помощью них найти $(r_1)^n_M$ и $(r_2)^n_0$ при известных остальных значениях на слое n. Для этого выразим исходные неизвестные через инварианты

$$v = \frac{r_1 + r_2}{2}$$
$$w = \frac{r_1 - r_2}{2c}$$

Граничные условия в инвариантах

$$r_1 + r_2|_{x=0} = 0$$
$$r_2|_{x=1} = 1$$

Схема для граничных узлов

Граничные условия в инвариантах

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)_0^n &= 0 \\ (r_2)_M^n &= 1 \end{aligned}$$

Из уголков для внутренних точек можно найти $(r_1)_0^n$ и $(r_2)_M^n$. $(r_1)_M^n$ и $(r_2)_0^n$ необходимо искать привлекая граничные условия. Легко найти $(r_2)_0^n = (r_1 + r_2)_0^n - (r_1)_0^n = -(r_1)_0^n$. Но $(r_1)_M^n$ из этих данных найти не получится. Более того, значение $(r_2)_M^n$ находится как с помощью схемы для внутренних точек, так и задается граничным условием!
Данная задача является некорректно поставленной.

Корректность условий для гиперболической системы

Пусть для гиперболической системы с Λ^- отрицательными, Λ^+ положительными и Λ^0 нулевыми собственными числами ($\Lambda^- + \Lambda^+ + \Lambda^0 = n$) задано K^- граничных условий слева и K^+ граничных условий справа.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{u})|_{x=0} &= \beta_i, \quad i = \overline{1, K^-} \\
(\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{u})|_{x=1} &= \beta_i, \quad i = \overline{K^- + 1, K^- + K^+}
\end{aligned}
$$

На левой границе известны значения всех инвариантов для $\lambda_i \leq 0$. Вместе с граничными условиями слева они должны давать невырожденную систему для остальных инвариантов.

Корректность условий для гиперболической системы

Математически, это выражается в отличии от нуля следующих определителей матриц, составленных из собственных векторов задачи (левых) и векторов $\boldsymbol{\alpha}$ из граничных условий. На левой границе

$$\det \left\| \underbrace{\boldsymbol{\omega}_1 \ \dots \ \boldsymbol{\omega}_{\Lambda^-}}_{\lambda_i<0} \quad \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\Lambda^-+1} \ \dots \ \boldsymbol{\omega}_{\Lambda^-+\Lambda^0}}_{\lambda_i=0} \quad \underbrace{\boldsymbol{\alpha}_1 \ \dots \ \boldsymbol{\alpha}_{K^-}}_{x=0} \right\| \neq 0$$

Аналогичные условия должны выполняться на правой границе

$$\det \left\| \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\Lambda^-+\Lambda^0+1} \ \dots \ \boldsymbol{\omega}_n}_{\lambda_i>0} \quad \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{\Lambda^-+1} \ \dots \ \boldsymbol{\omega}_{\Lambda^-+\Lambda^0}}_{\lambda_i=0} \quad \underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{K^-+1} \ \dots \ \boldsymbol{\alpha}_{K^-+K^+}}_{x=1} \right\| \neq 0$$

Численная схема в инвариантах

Численное решение можно искать как в исходных переменных (u, v), так и в инвариантах (r_1, r_2). Рассмотрим корректные краевые условия для волнового уравнения $v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0$. Численная схема в инвариантах выглядит так:

$$\frac{(r_1)_m^{n+1} - (r_1)_m^n}{\tau} - c\frac{(r_1)_{m+1}^n - (r_1)_m^n}{h} = f_m^n, \quad m = \overline{0, M-1}$$

$$\frac{(r_2)_m^{n+1} - (r_2)_m^n}{\tau} + c\frac{(r_2)_m^n - (r_2)_{m-1}^n}{h} = f_m^n, \quad m = \overline{1, M}$$

$$(r_1)_M^{n+1} = -(r_2)_M^{n+1}$$

$$(r_2)_0^{n+1} = -(r_1)_0^{n+1}$$

$$(r_1)_m^0 = [v_0 - cw_0]_m$$

$$(r_2)_m^0 = [v_0 + cw_0]_m$$

Алгоритм численного решения задачи

1. Значения инвариантов на 0-м временном слое получаются из начальных условий для (u, v)
2. Пусть слой n уже посчитан. По схемам «уголок» рассчитываются инварианты на слое $n+1$, всюду кроме двух граничных узлов. В одном нельзя вычислить инвариант r_1, в другом — r_2
3. Эти значения вычисляются из граничных условий (необходимые для вычислений данные уже найдены)
4. Слой $n+1$ полностью заполнен, и можно повторять с шага 2

Численная схема в исходных неизвестных

Перейдем от инвариантов к исходным переменным

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - c\frac{(v + cw)_{m+1}^n + (v - cw)_{m-1}^n - 2v_m^n}{2h} = f_m^n, \;\; m = \overline{1, M-1}$$

$$\frac{w_m^{n+1} - w_m^n}{\tau} - \frac{(wc + v)_{m+1}^n + (wc - v)_{m-1}^n - 2cw_m^n}{2h} = 0, \;\; m = \overline{1, M-1}$$

$$\frac{(v + cw)_0^{n+1} - (v + cw)_0^n}{\tau} - c\frac{(v + cw)_1^n - (v + cw)_0^n}{h} = f_0^n$$

$$v_0^{n+1} = 0$$

$$\frac{(v - cw)_M^{n+1} - (v - cw)_M^n}{\tau} + c\frac{(v - cw)_M^n - (v - cw)_{M-1}^n}{h} = f_0^n$$

$$v_M^{n+1} = 0$$

$$v_m^0 = [v_0]_m$$

$$w_m^0 = [w_0]_m$$

Алгоритм численного решения задачи в исходных переменных

1. Значения переменных на 0-м временном слое получаются из начальных условий
2. Пусть слой n уже посчитан. По схемам для внутренних точек рассчитываются переменные на слое $n+1$, всюду кроме двух граничных узлов.
3. В каждом граничном узле есть два линейных уравнения на две неизвестные u и v в этом узле. Решая системы, получаем значение переменных в граничных точках.
4. Слой $n+1$ полностью заполнен, и можно повторять с шага 2

Спасибо за внимание!

tsybulinhome@gmail.com