СЛАУ

Нормы векторов и матриц. Обусловленность

Цыбулин Иван (tsybulin@crec.mipt.ru (mailto:tsybulin@crec.mipt.ru))

Задача решения СЛАУ

Будем рассматривать случай системы с невырожденной квадратной матрицей

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Из линейной алгебоы известно, что система разрешима при $\det \mathbf{A} \neq 0$ и при этом решение единственно.

Что такое вырожденная матрица?

С точки зрения вычислительной математики матрица никогда не бывает строго вырождена в смысле $\det A = 0$. Но может ли небольшая коррекция коэффициентов быть решением проблемы $\det A = 0$?

Рассмотрим следующие две системы, которые лишь немного отличаются

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 1 \\ 2x_1 + 4.0001x_2 & = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 1 \\ 2x_1 + 4.0001x_2 & = 2.0001 \end{cases}$$

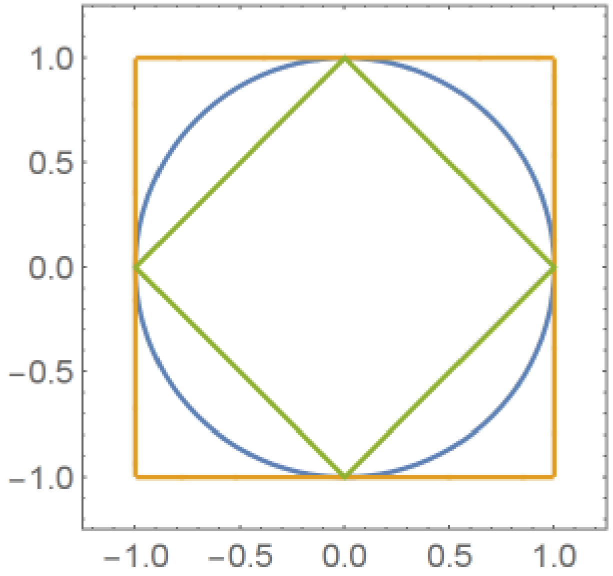
Их решения совершенно различны

$$\begin{cases} x_1 & = 1 \\ x_2 & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & = -1 \\ x_2 & = 1 \end{cases}$$

Нормы векторов

Для количественного исследования данной проблемы нужно ввести некоторую норму для векторов. В вычислительной математике наиболее часто используются

- $||\mathbf{x}||_\infty = \max_i |x_i|$ — максимум-норма, Чебышевская норма, ℓ_∞ норма
- $||\mathbf{x}||_{\ell_1} = \sum_i |x_i|$ — Манхэттенская норма, ℓ_1 норма
- $||\mathbf{x}||_E = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ — Евклидова норма



Матричные нормы

Говорят, что матричная норма $\|\mathbf{A}\|$ *согласована* с векторной нормой $\|\mathbf{x}\|$, если для любой матрицы $\mathbf{A}$ и любого вектора $\mathbf{x}$ выполняется следующее неравенство

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$$

Вводят понятие матричной нормы $\|\mathbf{A}\|$, *подчиненной* данной векторной норме $\|\mathbf{x}\|$

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Каждая векторная норма порождает свою подчиненную матричную норму. Подчиненная норма является согласованной.

Стандартные подчиненные матричные нормы

Доказывается, что

- $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.
- $\|\mathbf{A}\|_{\ell_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \|\mathbf{A}^\top\|_\infty$.
- $\|\mathbf{A}\|_E = \sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})}$
  - для $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, $\|\mathbf{A}\|_E = \max|\lambda(\mathbf{A})|$
  - для $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top > 0$, $\|\mathbf{A}\|_E = \lambda_{\max}(\mathbf{A})$

Задание. Вычислить все три нормы для

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Число обусловленности для СЛАУ

Расмотрим СЛАУ

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

и полученную из нее возмущением правой части

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}.$$

Пусть $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$.

Нам хотелось бы оценить относительную погрешность решения $\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$, связав ее с относительной погрешностью правой части $\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$

Пользуясь тем, что $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$, оценим

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|}\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Величина

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \equiv \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|}$$

называется *числом обусловленности системы уравнений* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \nu(\mathbf{A}, \mathbf{b})\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

In [13]:
```
import numpy as np
from numpy.linalg import norm, inv

def nu(A, b, kind = np.inf):
    return norm(inv(A), kind) * norm(b, kind) / norm(inv(A).dot(b), kind)

eps = 0.0001
A = np.array([[1, 2], [2, 4 + eps]])
b = np.array([1, 2])
print('nu_inf(A, b) =', nu(A, b, np.inf))
print('nu_1(A, b) =', nu(A, b, 1))
print('nu_E(A, b) =', nu(A, b, 2))
```

```
nu_inf(A, b) = 120002.0
nu_1(A, b) = 180003.0
nu_E(A, b) = 111805.187737
```

Число обусловленности матрицы

Насколько плохо может быть обусловлена система с данной матрицей $\mathbf{A}$? Можно ли за счет выбора правой части $\mathbf{b}$ сделать систему сколь угодно плохой? Оказывается, нет.

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Последная величина зависит лишь от матрицы $\mathbf{A}$ и называется *числом обусловленности матрицы*

$$\mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Матрицу можно считать вырожденной, если ее число обусловленности превосходит $\frac{1}{\delta}$, где δ — относительная погрешность выполнения машинных операций.

In [15]:
```
def mu(A, kind = np.inf):
    return norm(inv(A), kind) * norm(A, kind)

eps = 0.0001
A = np.array([[1, 2], [2, 4 + eps]])
print('mu_inf(A) =', mu(A, np.inf))
print('mu_1(A) =', mu(A, 1))
print('mu_E(A) =', mu(A, 2))
```

```
mu_inf(A) = 360012.000101
mu_1(A) = 360012.000101
mu_E(A) = 250008.000097
```

Плохо обусловленные задачи

Решение СЛАУ — пример потенциально *плохо обусловленной задачи*, то есть задачи, в которой небольшое возмущение входных данных может приводить к существенным отличиям в решении. Для таких задач необходимо задавать входные данные с большой точностью, иначе результат может получиться совершенно недостоверным.