Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задача Коши

Методы Рунге-Кутты. Методы Адамса

Цыбулин Иван (tsybulin@crec.mipt.ru)

Задача Коши для ОДУ

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = G(t, y(t)), \qquad 0 < t \leqslant T$$

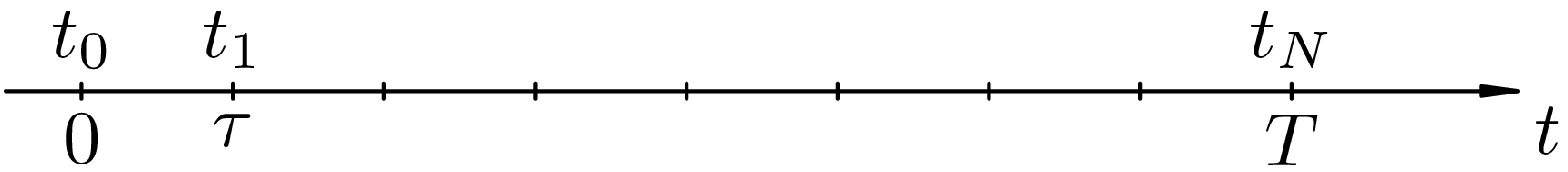
Чтобы выделить единственное решение, небходимо наложить дополнительные условия, например,

$$y\Big|_{t=0} = y_0$$

Так поставленная задача называется *задачей Коши*.

Сетка

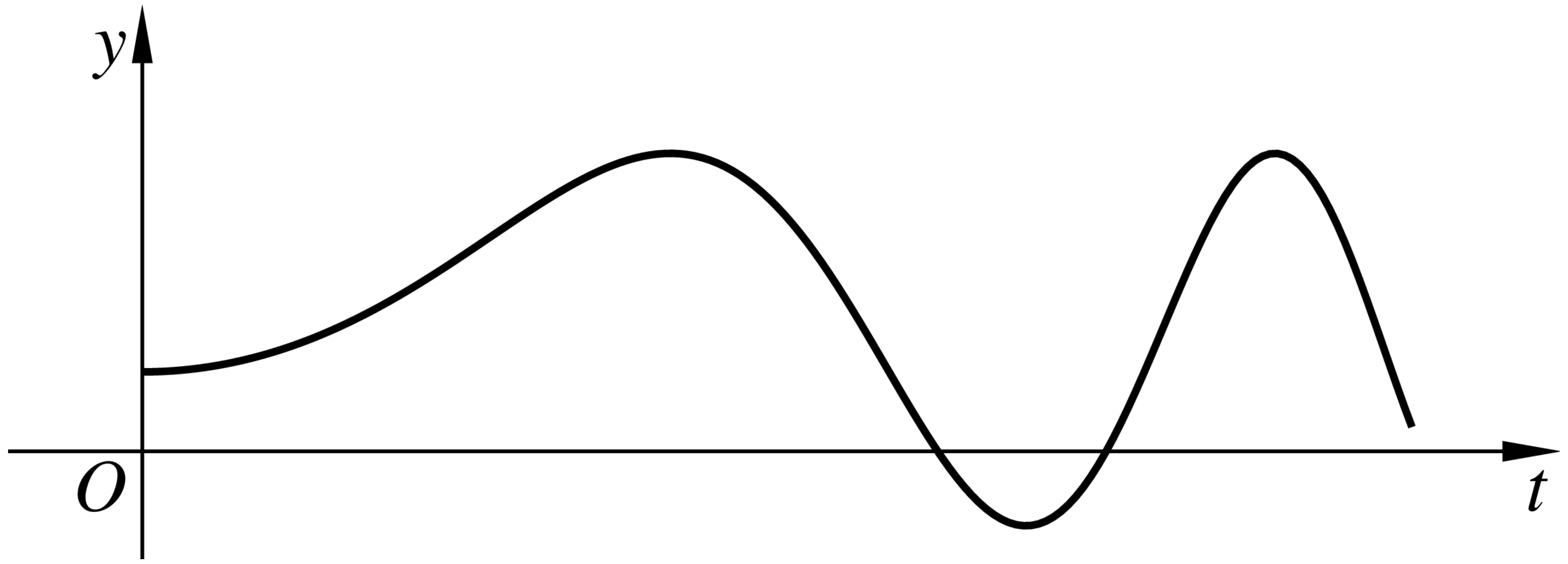
Для решения задачи Коши на отрезке $[0, T]$ вводят сетку (равномерную или неравномерную), а вместо функции $y(t)$ ищут ее значения в узлах сетки.

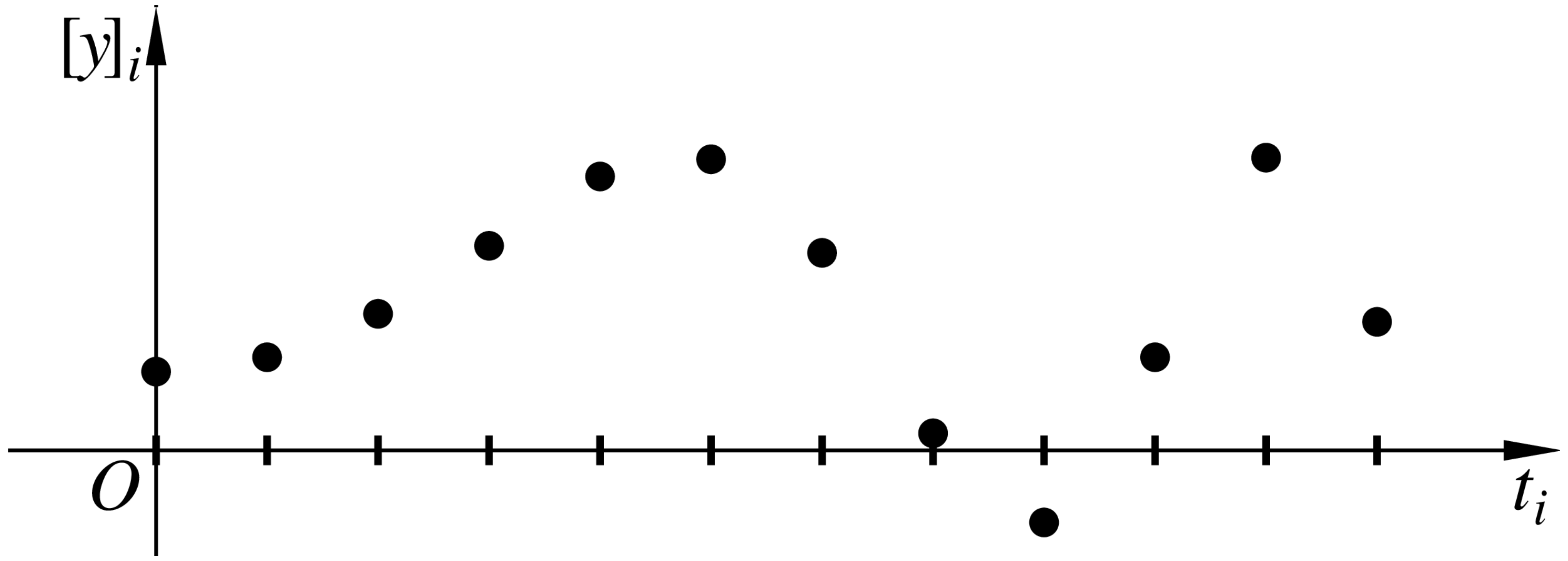


Сеточная функция

Функция u_n, заданная в узлах сетки, в отличие от непрерывной $y(t)$, является элементом конечномерного пространства $\mathbb{R}^N$. Из любой непрерывной функции $y(t)$ можно получить сеточную, данная операция называется проецированием:

$$u_n = [y]_n \equiv y(t_n)$$





Разностная задача

Для нахождения сеточной функции формулируется *разностная задача*, «похожая» на исходную дифференциальную.

Например,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \sin y(t) = 1, \quad 0 < t \leqslant 2 \\ y(0) = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + \sin u_n = 1, \quad n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

Легко видеть, что при стремлении $\tau \to 0$ разностная задача переходит в дифференциальную.

Аппроксимация

Более строго, говорят, что разностная задача *аппроксимирует* дифференциальную, если проекция точного решения дифференциальной задачи удовлетворяет разностной задаче с малой невязкой. Эта невязка называется ошибкой аппроксимации.

Чем меньше ошибка аппроксимации, тем точнее разностная задача приближает дифференциальную. Если ошибка аппроксимации имеет величину $O(\tau^p)$, то говорят, что порядок аппроксимации равен p.

Изучение аппроксимации

Рассмотрим дифференциальную задачу Коши

$$y'(t) + \sin y(t) = 0$$

$$y(0) = 1$$

и разностную задачу

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + \sin\left(u_n - \frac{\tau}{2}\sin u_n\right) = 0$$

$$u_0 = 1$$

Для изучения аппроксимации подставим $u_n = [y]_n$.

Изучение аппроксимации

После подстановки в разностном уравнении возникает невязка ($[y]_n$ — не решение разностной задачи)

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} + \sin\left([y]_n - \frac{\tau}{2}\sin[y]_n\right) = \delta_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta_0$$

Так как $[y]_0 = y(0) = 1$, ошибка аппроксимации в нулевом узле δ_0 равна нулю. Найдем величину δ_{n+1}, учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет условиям

$$y'(t) + \sin y(t) = 0$$

$$y(0) = 1$$

Изучение аппроксимации

$$\delta_{n+1} = \frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} + \sin\left([y]_n - \frac{\tau}{2}\sin[y]_n\right)$$

Пользуясь формулой Телора можем записать:

$$y(t_n + \tau) = y(t_n) + \tau y'(t_n) + \frac{\tau^2}{2} y''(t_n) + \frac{\tau^3}{6} y'''(t_n) + O(\tau^4)$$

Используя обозначение проекции, эта формула запишется в виде

$$[y]_{n+1} = [y]_n + \tau[y']_n + \frac{\tau^2}{2}[y'']_n + \frac{\tau^3}{6}[y''']_n + O(\tau^4)$$

Изучение аппроксимации

$$[y]_{n+1} = [y]_n + \tau[y']_n + \frac{\tau^2}{2}[y'']_n + \frac{\tau^3}{6}[y''']_n + O(\tau^4)$$

$$\delta_{n+1} = \frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} + \sin\left([y]_n - \frac{\tau}{2}\sin[y]_n\right) =$$

$$= [y']_n + \frac{\tau}{2}[y'']_n + \frac{\tau^2}{6}[y''']_n + O(\tau^3) +$$

$$+ \sin[y]_n - \frac{\tau}{2}\sin[y]_n \cos[y]_n - \frac{\tau^2}{8}\sin^3[y]_n + O(\tau^3)$$

Изучение аппроксимации

Собирая слагаемые одного порядка вместе, получаем

$$\delta_{n+1} = ([y']_n + \sin[y]_n) + \frac{\tau}{2}([y'']_n - \sin[y]_n \cos[y]_n) + \frac{\tau^2}{24}(4[y''']_n - 3\sin^3[y]_n) + O(\tau^3)$$

Слагаемое $[y']_n + \sin[y]_n$ обнуляется, так как $y' + \sin y = 0$. Но оказывается, что и второе слагаемое также обнуляется:

$$y' = -\sin y \implies y'' = -y' \cos y = \sin y \cos y$$

Таким образом, $\delta_{n+1} = O(\tau^2)$. Имеем апроксимацию второго порядка.

Устойчивость

Оказывается, что одной аппроксимации недостаточно, чтобы гарантировать близость решений разностной задачи u_n и точного решения диффернциальной задачи $[y]_n$. Для этого необходимо, чтобы разностная задача была *устойчивой*.

Пусть u_n — решение разностной задачи, а v_n — решение возмущенной задачи:

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + \sin\left(u_n - \frac{\tau}{2}\sin u_n\right) = 0 \\ u_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{v_{n+1}-v_n}{\tau} + \sin\left(v_n - \frac{\tau}{2}\sin u_v\right) = \epsilon_{n+1} \\ u_0 = 1 + \epsilon_0 \end{cases}$$

Устойчивость разностной задачи означает существование такой константы C, что

$$\max_n |u_n - v_n| \leqslant C \max_n |\epsilon_n|,$$

причем C не зависит от шага τ.

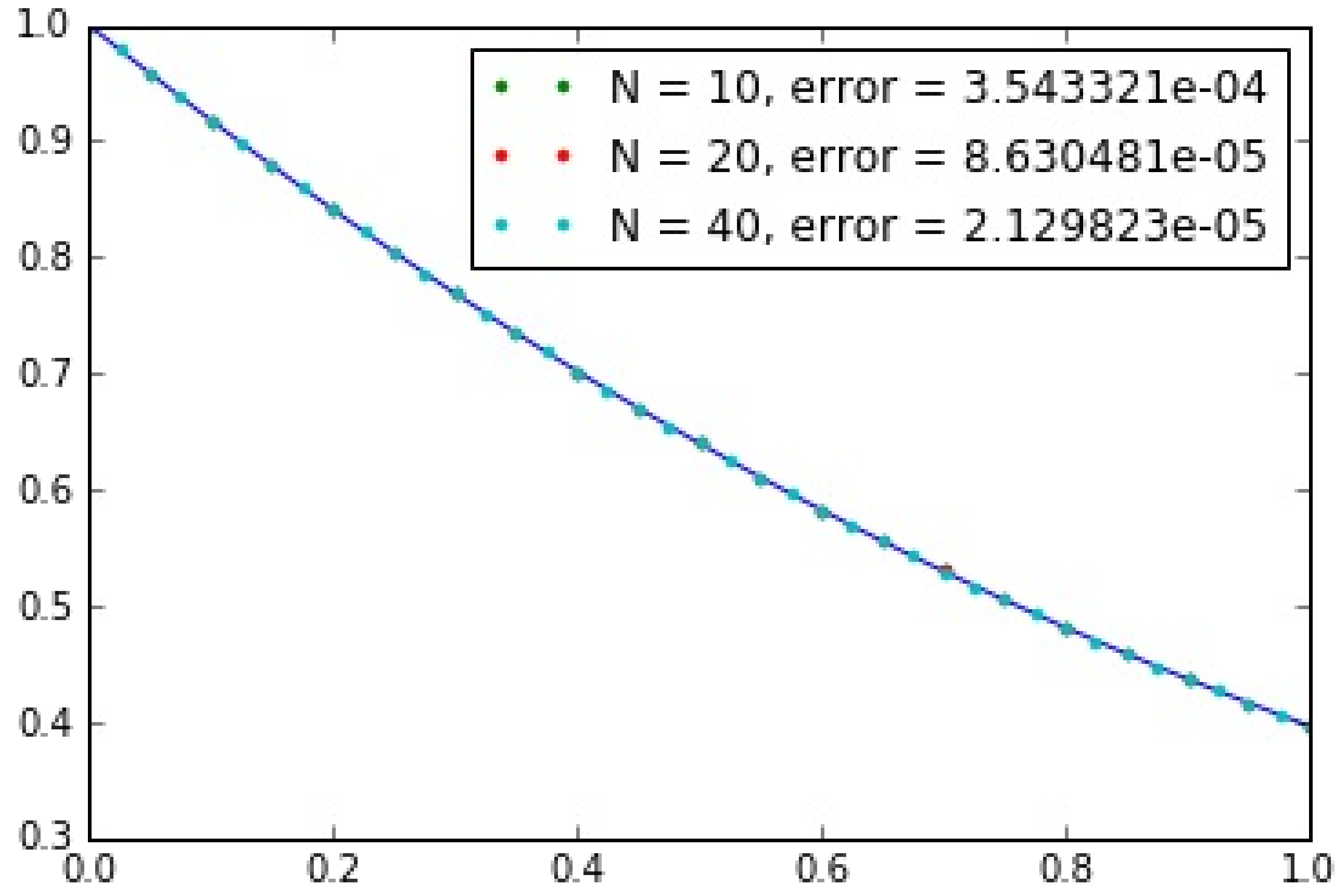
```python
import numpy as np

def difference_solution(N, eps=0):
    T = 1.0
    tau = T / N
    u = np.zeros(N+1)
    u[0] = 1 + eps * np.random.rand(1)
    for n in range(N):
        k1 = -np.sin(u[n])
        k2 = -np.sin(u[n] + tau/2 * k1)
        u[n+1] = u[n] + tau * k2 + tau * eps * np.random.rand(1)
    return u
# Проверяем устойчивость
for N in 2**np.arange(3, 10):
    u = difference_solution(N)
    v = difference_solution(N, 1e-6)
    print('N =', N, ' max |u_n - v_n| =', np.linalg.norm(u - v, np.inf))
```

```
N = 8  max |u_n - v_n| = 7.0643050476e-07
N = 16  max |u_n - v_n| = 8.03801930682e-07
N = 32  max |u_n - v_n| = 7.20776045626e-07
N = 64  max |u_n - v_n| = 4.28423205578e-07
N = 128  max |u_n - v_n| = 3.53711414103e-07
N = 256  max |u_n - v_n| = 7.21712172358e-07
N = 512  max |u_n - v_n| = 3.8929621804e-07
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

def exact_solution(t): return 2 * np.arctan(np.exp(-t) * np.tan(0.5))
# Сравним численное решение с точным
plt.plot(np.linspace(0, 1, 1000), exact_solution(np.linspace(0, 1, 1000)))
for N in [10, 20, 40]:
    u = difference_solution(N)
    y = exact_solution(np.linspace(0, 1, N+1))
    plt.plot(np.linspace(0, 1, N+1), u, '.',
        label='N = %d, error = %e' % (N, np.linalg.norm(u - y, np.inf)))
plt.legend(); plt.show()
```



Неустойчивые схемы

Рассмотрим следующую разностную задачу

$$\frac{2u_{n+1} + u_n - 3u_{n-1}}{5\tau} + \frac{9\sin u_n + \sin u_{n-1}}{10} = 0, \quad n = 1, \dots, N-1$$

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 1 - \tau \sin 1$$

Можно убедиться, что эта задача аппроксимирует со вторым порядком ту же дифференциальную задачу

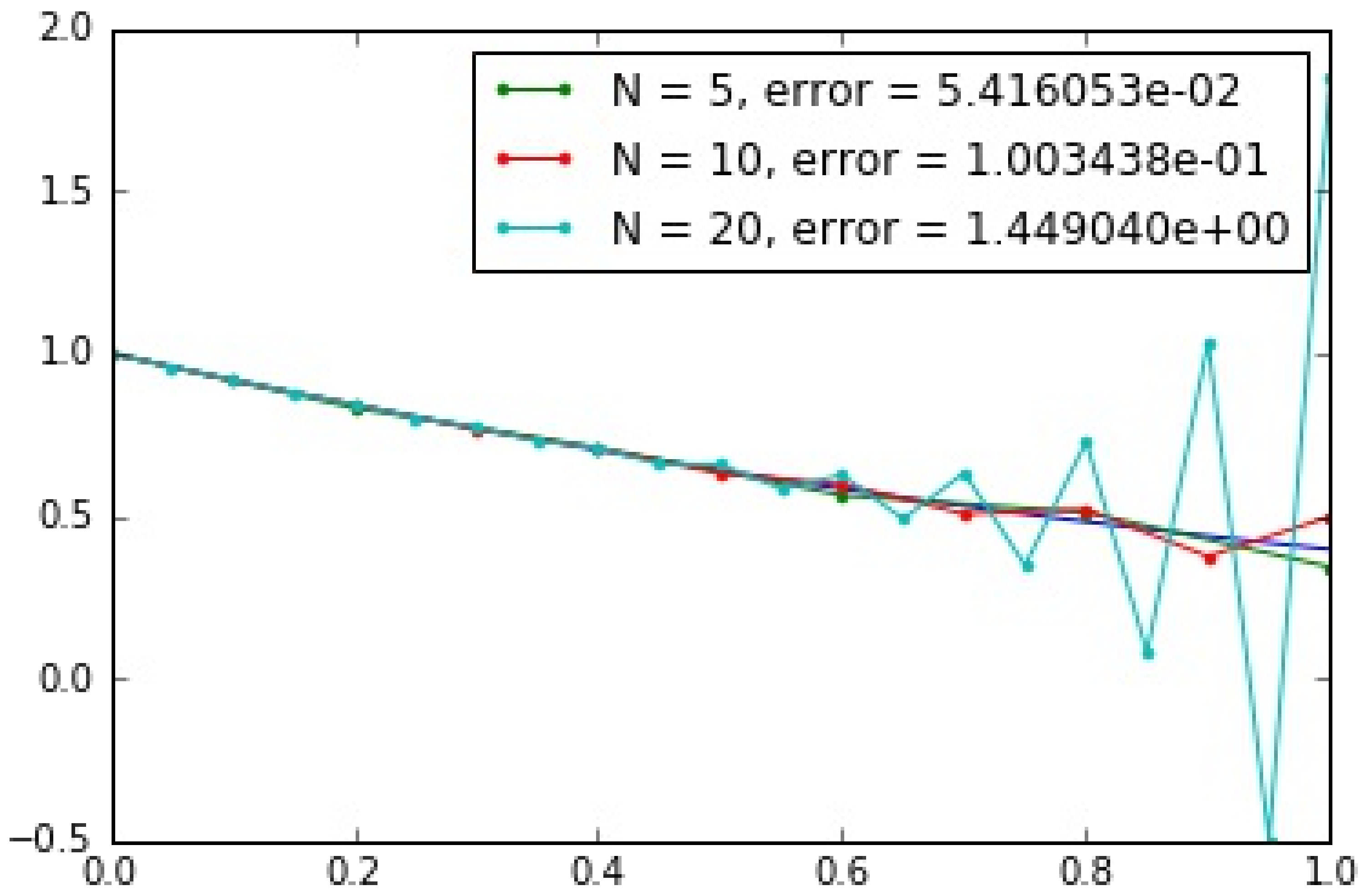
$$y'(t) + \sin y(t) = 0$$

$$y(0) = 1$$

```
def unstable_method(N, eps=0):
    T = 1.0
    tau = T / N
    u = np.zeros(N+1)
    u[0] = 1 + eps * np.random.rand(1)
    u[1] = 1 - tau * np.sin(1) + eps * np.random.rand(1)
    for n in range(1, N):
        rhs = 0.9 * np.sin(u[n]) + 0.1 * np.sin(u[n-1])
        u[n+1] = 0.5*(3*u[n-1]-u[n] - 5*tau*rhs + 5*tau*eps*np.random.rand(1))
    return u
# Проверяем устойчивость
for N in 2**np.arange(3, 10):
    u = unstable_method(N)
    v = unstable_method(N, 1e-6)
    print('N =', N, ' max |u_n - v_n| =', np.linalg.norm(u - v, np.inf))
```

```
N = 8  max |u_n - v_n| = 5.57383362154e-06
N = 16  max |u_n - v_n| = 0.000422585953988
N = 32  max |u_n - v_n| = 0.0864150519454
N = 64  max |u_n - v_n| = 24380.7386585
N = 128  max |u_n - v_n| = 3.37333692632e+15
N = 256  max |u_n - v_n| = 1.94248734307e+38
N = 512  max |u_n - v_n| = 3.50060667232e+83
```

```
# Сравним численное решение с точным
plt.plot(np.linspace(0, 1, 1000), exact_solution(np.linspace(0, 1, 1000)))
for N in [5, 10, 20]:
    u = unstable_method(N)
    y = exact_solution(np.linspace(0, 1, N+1))
    plt.plot(np.linspace(0, 1, N+1), u, '.-',
        label='N = %d, error = %e' % (N, np.linalg.norm(u - y, np.inf)))
plt.legend(); plt.show()
```



Методы Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты относятся к одношаговым методам, то есть для вычисления решения в узле t_{n+1} необходимо знать лишь решение в узле t_n. Каждый такой шаг состоит из нескольких *стадий*. На каждой стадии вычисляется вспомогательная величина — наклон $k_i,\ i = 1, \ldots, s$, s — число стадий.

Шаг метода Рунге-Кутты

Для уравнения (или системы уравнений)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}(t))$$

один шаг s-стадийного метода Рунге-Кутты для перехода от t_n к t_{n+1} задается формулами

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{G}\left(t_n + c_1\tau, \mathbf{u}_n + \tau \textstyle\sum_{j=1}^{s} a_{1j}\mathbf{k}_j\right)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{G}\left(t_n + c_s\tau, \mathbf{u}_n + \tau \textstyle\sum_{j=1}^{s} a_{sj}\mathbf{k}_j\right)$$

$$\tfrac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} = \textstyle\sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i$$

$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s
\end{array}$$

Коэффициенты метода

Числа c_i, a_{ij}, b_i являются фиксированными константами, которые определяют конкретный численный метод. Их часто организуют в *таблицу Бутчера*

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s
\end{array}
$$

Фактически, все свойства конкретного метода Рунге-Кутты определяются его таблицей Бутчера.

Явные методы РК

Метод Рунге-Кутты называется явным, если его матрица A содержит нули на главной диагонали и выше нее:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{G}\left(t_n + c_1\tau, \mathbf{u}_n\right)\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{G}\left(t_n + c_2\tau, \mathbf{u}_n + \tau a_{21}\mathbf{k}_1\right)\\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{G}\left(t_n + c_3\tau, \mathbf{u}_n + \tau a_{31}\mathbf{k}_1 + \tau a_{32}\mathbf{k}_2\right)\\
&\vdots\\
\mathbf{k}_s &= \mathbf{G}\left(t_n + c_s\tau, \mathbf{u}_n + \tau \textstyle\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}\mathbf{k}_j\right)\\
\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} &= \textstyle\sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
c_2 & a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0\\
c_3 & a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & 0\\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

Таким образом, все наклоны $\mathbf{k}_i$ вычисляются по явным формулам друг за другом.

Полуявные методы РК

Метод Рунге-Кутты называется полуявным (диагонально-неявным), если его матрица A содержит нули выше главной диагонали:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{G}\left(t_n + c_1\tau, \mathbf{u}_n + \tau a_{11}\mathbf{k}_1\right)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{G}\left(t_n + c_2\tau, \mathbf{u}_n + \tau a_{21}\mathbf{k}_1 + \tau a_{22}\mathbf{k}_2\right)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{G}\left(t_n + c_3\tau, \mathbf{u}_n + \tau a_{31}\mathbf{k}_1 + \tau a_{32}\mathbf{k}_2 + \tau a_{33}\mathbf{k}_3\right)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{G}\left(t_n + c_s\tau, \mathbf{u}_n + \tau \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}\mathbf{k}_j\right)$$

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} = \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
c_1 & a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & a_{ss} \\
\hline
\end{array}$$

Неявные методы РК

В противном случае метод называется неявным. Для определения всех наклонов необходимо решить систему алгебраических уравнений относительно всех $\mathbf{k}_i$ одновременно

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{G}\left(t_n + c_1\tau, \mathbf{u}_n + \tau a_{11}\mathbf{k}_1 + \tau a_{21}\mathbf{k}_2 + \dots + \tau a_{1s}\mathbf{k}_s\right) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{G}\left(t_n + c_2\tau, \mathbf{u}_n + \tau a_{21}\mathbf{k}_1 + \tau a_{22}\mathbf{k}_2 + \dots + \tau a_{2s}\mathbf{k}_s\right) \\ \vdots \\ \mathbf{k}_s = \mathbf{G}\left(t_n + c_s\tau, \mathbf{u}_n + \tau a_{s1}\mathbf{k}_1 + \tau a_{s2}\mathbf{k}_2 + \dots + \tau a_{ss}\mathbf{k}_s\right) \end{cases}$$

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} = \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i$$

Порядок аппроксимации метода РК

Порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты можно определить из его коэффициентов. Обычно при рассмотрении методов Рунге-Кутты принимают дополнительные условия Кутты $c_i = \sum_j a_{ij}$. Эти условия значительно упрощают выкладки при анализе и не снижают общности рассматриваемых методов. Для того, чтобы метод имел порядок p он должен удовлетворять следующим условиям порядка вплоть до p вкючительно:

- Условия 1-го порядка: $\sum_{i=1}^s b_i = 1$
- Условия 2-го порядка: $\sum_{i=1}^s b_i c_i = 1/2$
- Условия 3-го порядка: $\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = 1/3, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = 1/6$

```python
def rk4step(tau, tn, un, G):
    k1 = G(tn, un)
    k2 = G(tn + 0.5*tau, un + 0.5*tau*k1)
    k3 = G(tn + 0.5*tau, un + 0.5*tau*k2)
    k4 = G(tn + tau, un + tau*k3)
    return un + tau * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6.0

def G(t, u): return -np.sin(u)

def rk4(N):
    T = 1.0
    tau = T / N
    u = np.zeros(N+1)
    u[0] = 1
    for n in range(N):
        u[n+1] = rk4step(tau, tau*n, u[n], G)
    return u
```

```
def exact_solution(t): return 2 * np.arctan(np.exp(-t) * np.tan(0.5))
# Сравним численное решение методом РК4 с точным
plt.plot(np.linspace(0, 1, 1000), exact_solution(np.linspace(0, 1, 1000)))
for N in [5, 10, 20]:
    u = rk4(N)
    y = exact_solution(np.linspace(0, 1, N+1))
    plt.plot(np.linspace(0, 1, N+1), u, '.',
        label='N = %d, error = %e' % (N, np.linalg.norm(u - y, np.inf)))
plt.legend(); plt.show()
```